7. FEJEZET

7.2 Alfejezet

1. Elöször adjunk állandó címkét az 1-es csúcsnak: [0* 7 12 21 31 44]
   Ezután a 2-es csúcs kap állandó címkét [0* 7* 12 21 31 44].

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
3	min{12,7+7} = 12*
4	min{21,7+12} = 19
5	min{31,7+21} = 28
6	min{44,7+31} = 38

A címkék jelenlegi értékei [0* 7* 12* 19 28 38]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
4	min{19,12+7} = 19*
5	min{28,12+12} = 24
6	min{38,12+21} = 33

A címkék jelenlegi értékei [0* 7* 12* 19* 24 33]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
5	min{24,19+7} = 24*
6	min{33, 19+12} = 31

A címkék jelenlegi értékei [0* 7* 12* 19* 24* 31]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
6	min{31,24+7} = 31

A címkék jelenlegi értékei [0* 7* 12* 19* 24* 31*]

31 -24 = c_{56}, 24 - 12 = c_{35}, 12 - 0 = c_{13}. Tehát az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb út az 1-3-6 útvonal, melynek a hossza 31.

2. Induláskor állandó címkét adunk az 1-es csúcsnak és ideiglenes címkéket rendelünk a többi csúcshoz: [0* 2 8 ∞ ∞]. Ezután a 2-es csúcs kap állandó címkét: [0* 2* 8 ∞ ∞]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
3	min{8,2+5} = 7
4	min{∞, 2+4} = 6*
5	min{∞,2+12} = 14

A címkék jelenlegi értékei [0* 2* 7 6* 14]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
3	min{7} = 7*
5	min{14,6+10} = 14

A címkék jelenlegi értékei [0* 2* 7* 6* 14]. Mivel a legutóbb állandó címkével ellátott csúcsból (a 3-asból) nem vezet él az 5-ös csúcsba, ezért állandó címkét rendeletünk az 5-ös csúcshoz. Az eredmény [0* 2* 7* 6* 14*]. Mivel c_{25} = 14 – 2, és c_{12} = 2 – 0, ezért azt kapjuk, hogy az 1-es csúcsból az 5-ösbe vezető legrövidebb út az 1-2-5 útvonal, aminek a hossza 14.

3.

	2.Csúcs	3.Csúcs	4.Csúcs	5.Csúcs	Kínálat
1.Csúcs	2	8	M	M	1
2.Csúcs	0	5	4	12	1
3.Csúcs	M	0	5	M	1
4.Csúcs	M	M	0	10	1
Kereslet	1	1	1	1	

4. Induláskor állandó címkét kap az 1-es csúcs [0* 2 1 ∞]. Ezután a 3-as csúcs kap állandó címkét: [0* 2 1* ∞]. Tovább haladva a 4-es csúcs új ideiglenes címkéje min{∞,1+1} = 2, a 2-es csúcs pedig állandó címkét kap, s ezzel [0* 2* 1* 2] lesz az eredmény. Végül a 4-es csúcs ideiglenes címkéje válik véglegessé, tehát [0* 2* 1* 2*] a végeredmény, s eszerint 1-3-4 a legrövidebb út. Természetesen az 1 hosszúságú 1-2-3-4 útvonal még rövidebb, de erre nem talál rá a Dijkstra módszer, hiszen a 3-as csúcs nem szomszédja az 1-es csúcsnak, s emiatt nem lehet Dijkstra algoritmusa szerint az 1-es csúcshoz legközelebbi csúcs.

5. Jelölje az 1-es csúcs az első év elejét, a 7-es csúcs pedig a hatodik év végét, illetve a hetedik év elejét.
c_{12} = 3300, c_{13} = 4800, c_{14} = 7600, c_{15} = 9800, c_{16} = 12,400, c_{17} = 15,600, c_{23} = 3300, c_{24} = 4800, c_{25} = 7600, c_{26} = 9800, c_{27} = 12,400, c_{34} = 3300, c_{35} = 4800, c_{36} = 7600, c_{37} = 9800, c_{45} = 3300, c_{46} = 4800, c_{47} = 7600, c_{56} = 3300, c_{57} = 4800, c_{67} = 3300

Induláskor állandó címkét kap az 1-es csúcs [0* 3300 4800 7600 9800 12,400 15,600]. Ezután a 2-es csúcshoz rendelünk állandó címkét: [0* 3300* 4800 7600 9800 12,400 15,600]

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
3	min{4800,3300+3300} = 4800*
4	min{7600,4800+3300} = 7600
5	min{9800,7600+3300} = 9800
6	min{12,400,9800+3300} = 12,400
7	min{15,600,12,400+3300} = 15,600

A 3-as csúcs címkéjét véglegesítve [0* 3300* 4800* 7600 9800 12,400 15,600]adódik.

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
4	min{7600,4800+3300} = 7600*
5	min{9800,4800+4800} = 9600
6	min{12,400,4800+7600} = 12,400
7	min{15,600,4800+ 9800} = 14,600

A 4-es csúcs címkéjét véglegesítve [0* 3300* 4800* 7600* 9600 12,400 14,600] adódik.

Csúcs	Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
5	min{9600,7600+3300} = 9600*
6	min{12,400,7600+4800} = 12,400
7	min{14,600,7600+7600} = 14,600

Állandó címkét rendelünk az 5-ös csúcshoz [0* 3300* 4800* 7600* 9600* 12,400 14,600].

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
6 min{12,400,9600+3300} = 12,400*
7 min{14,600,9600+4800} = 14,400
Állandó címkét rendelünk a 6-os csúcshoz [0* 3300* 4800* 7600* 9600* 12,400* 14,400]

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
7 min{14,400,12,400+3300} =14,400
Véglegesítjük a 7-es csúcs címkéjét, s ezzel [0* 3300* 4800* 7600* 9600* 12,400* 14,400*] adódik. 14,400 - 9600 = c_{57}, 9600 - 4800 = c_{35}, and 4800 - 0 = c_{13}, ezért az 1-es csúcsból a 7-es csúcsba vezető legrövidebb út az 1-3-5-7 útvonal. Eszerint két év után célszerű eladni az autót.

6. Jelölje az 1-es csúcs az első év elejét, a 7-es csúcs pedig a hatodik év végét, tehát a hetedik év elejét!
c_{12} = 60, c_{13} = 90, c_{14} = 130, c_{15} = 190, c_{16} = 260 c_{23} = 60, c_{24} = 90, c_{25} = 130, c_{26} = 190, c_{27} = 260, c_{34} = 60, c_{35} = 90, c_{36} = 130, c_{37} = 190, c_{45} = 60, c_{46} = 90, c_{47} = 130, c_{56} = 60, c_{57} = 90, c_{67} = 60

Induláskor állandó címkét kap az 1-es csúcs [0* 60 90 130 190 260 ∞]. Ezután a 2-es csúcshoz rendelünk állandó címkét.: [0* 60* 90 130 190 260 ∞] .

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
3 min{90,60+60} = 90*
4 min{130,60+90} = 130
5 min{190,60+130}=190
6 min{260,60+190} = 250
7 min{∞,60+260} = 320
A 3-as csúcs címkéjét véglegesítve [0* 60* 90* 130 190 250 320] adódik.

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
4 min{130,90+60} = 130*
5 min{190,90+90} = 180
6 min{250,90+130} = 220
7 min{320,90+190} = 280
A 4-es csúcs címkéjét véglegesítve [0* 60* 90* 130* 180 220 280] adódik.

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
5 min{180,130+60} = 180*
6 min{220,130+90} = 220
7 min{280,130+130} = 260
Az 5-ös csúcs címkéjét véglegesítve [0* 60* 90* 130* 180* 220 260]adódik.

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
6 min{220,180+60} = 220*
7 min{260,180+90} = 260
Végleges címkét kap a 6-os csúcs [0* 60* 90* 130* 180* 220* 260]

Csúcs Ideiglenes címke (* jelöli a következő állandó címkét)
7 min{260,220+60} =260

A 7-es csúcs címkéjét véglegesítve [0* 60* 90* 130* 180* 220* 260*] lesz a végeredmény. 260 - 130 = c_{47} és 130 - 0 = c_{14} , tehát 1-4-7 a legrövidebb útvonal. Ezért 3 évig célszerű megtartani a telefonkészüléket.

7. Jelöljük c_{ij} –vel a vételár és a fenntartási költségek összegét arra az esetre, ha a gépet az i-edik év elején szerezzük be, és a j-edik év elejéig használjuk. Az öt év alatt felvetődő költségek minimalizálásának feladatát a következő összetett szállítási feladattal modellezhetjük:

	2	3	4	5	6	
1	208	258 1	355	537	841	1
2	0 1	258	278	375	557	1
3	M	0	248	298	395 1	1
4	M	M	0 1	288	388	1
5	M	M	M	0 1	388	1
	1	1	1	1	1	

4 5 6

A fenti optimális tábla szerint 2 évig érdemes megtartani az első gépet. Ezután újat vásárolunk, és azzal dolgozunk további három évig.

8. Legyen c_{ij} annak a költsége, hogy miden >i és ≤j hüvelyk magas könyvet egyetlen polcon tárolunki.

c_{04} = 2300 + 200(.5)(4)(5) = $4300
c_{08} = 2300 + 300(.5)(8)(5) = $8300
$c_{0,12}$ = 2300 + 380(.5)(12)(5) = $13,700
$c_{4,8}$ = 2300 + 100(.5)(5)(8) = $4300
$c_{4,12}$ = 2300 + .5(180)(5)(12) = $7700
$c_{8,12}$ = 2300 + .5(5)(12)(80) = $4700

Könnyen látható, hogy a 0-ból a 12-be vezető legrövidebb út a 0-4-12 útvonal, melynek a költsége 12000 dollár. Tehát egy 4 hüvelyk magas polcot építünk a 4 hüvely magas könyvek számára, ezenkívül egy 12 hüvelyk magas polcot a 8 és 12 hüvelyk magas könyvek számára.

9. Legyen j>i esetén x_{ij} = 1 , ha i-edik típusú dobozokkal elégítjük ki az i-edik, (i+1)-edik, ..., (j-1)-edik típusú dobozok iránti igényt. Ekkor egy összetett szállítási feladathoz jutunk, ami kiegyensúlyozott szállítási feladatként is megfogalmazható a következőképpen (az optimális megoldást is megadjuk);

Mindegyik kereslet illetve kínálat értéke 1:
Vegyük észre: x_{ii} = 1 azt jelenti, hogy i-edik típusú dobozt nem használunk.

	2	3	4	5	6	7	8
1		24,10 1	40,60	63,70	70,30	83,50	90,10
2		10,00	25,00	46,00	52,00	64,00	70,00
3	14,20 0	0	14,00 1	32,20	37,40	47,80	53,00
4	0 1	M	0	17,80 1	22,60	32,20	37,00
5	M	M	M	0	4800	12,40	16,20 1
6	M	M	M	M	0 1	8200	11,80
7	M	M	M	M	M	0 1	4400

Példaként, c_{36} = 1000 + 26(500+700+200) = 37400 dollár
A minimális összköltség értéke 72100 dollár, és ezt úgy érjük el, ha 33-as méretű dobozokkal elégítjük ki a 33-as és 30-as dobozok iránti igényt, 26-os méretű dobozokkal a 26-os dobozok iránti igényt, 24-esekkel a 24-esek iránti igényt, és 19-es méretű dobozokkal elégítjük ki valamennyi további igényt.

10. Példaként tekintsük a 2. Feladatot! Felírunk egy összetett szállítási feladatot, melynek a megoldása az 1-es csúcsból valamennyi csúcsba megadja a legrövidebb útvonalakat. Bevezetünk egy új, 0-adik csúcsot, aminek 6 - 1 = 5 egység a nettó kibocsátása, behúzzuk továbbá a (0, 1) élt. Az 1-es csúcs nettó kibocsátása 0 lesz, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös és 6-os csúcsok nettó kereslete pedig 1. Ennek a feladatnak az optimális megoldása potosan 1 egységet fog szállítani az 1-es csúcsból a 2-6 csúcsok mindegyikébe. Az 1-es csúcsból az i-edik csúcsba szállított 1 egység az 1-esből az i-edikbe vezető legrövidebb úton lesz szállítva; ha ez nem így lenne, akkor átirányítva a szállítmányt az 1-esből az i-edikbe vezető legrövidebb útvonalra egy jobb megoldást találnánk, ez viszont ellentmondana az aktuális megoldás optimalitásának.

7.3 Alfejezet

1. max $z = x_0$

f.h. $x_{so,1} \leq 6$, $x_{so,2} \leq 2$ $x_{12} \leq 1$, $x_{32} \leq 3$, $x_{13} \leq 3$, $x_{3,si} \leq 2$, $x_{24} \leq 7$, $x_{4,si} \leq 7$

$x_0 = x_{so,1} + x_{so,2}$ (forrás)
$x_{so,1} = x_{13} + x_{12}$ (1-es csúcs)
$x_{12} + x_{32} + x_{s0,2} = x_{24}$ (2-es csúcs)
$x_{13} = x_{32} + x_{3,si}$ (3-as csúcs)
$x_{24} = x_{4,si}$ (4-es csúcs)
$x_{3,si} + x_{4,si} = x_0$ (nyelő)
Mindegyik változó ≥ 0.

Az induló folyam értéke mindegyik élen 0. Első lépésként megcímkézzük a nyelőt az előremutató élekből álló (so, 1) - (1, 3) - (3, 2) - (2, 4) - (4, si) útvonal segítségével. 3-mal növeljük a folyam értékét a felsorolt éleken, s így a következő lehetséges folyamhoz jutunk:

Él	Folyam
so-1	3
so-2	0
1-3	3
1-2	0
2-4	3
3-si	0
3-2	3
4-si	3

A folyam értéke 3

Válasszuk ezután a (so-2) - (2-4), (4, si) útvonalat. Mindegyik él előre mutat, és mindegyiken 2-vel növelhetjük a folyam értékét. Így a következő megengedett folyamot kapjuk:

Él	Folyam
so-1	3
so-2	2
1-3	3
1-2	0
2-4	5
3-si	0
3-2	3
4-si	5

A folyam értéke 5

Válasszuk ezután a (so-1) - (1, 2) - (3, 2) - (3, si) láncot. Ezen a (3,2) él visszafelé mutat, a többi él előre mutat. Az előremutató éleken 1-gyel növelhetjük, a visszafelé mutató élen 1-gyel csökkenthetjük a folyam értékét. Ezzel a következő lehetséges folyam adódik:

Él	Folyam
so-1	4
so-2	2
1-3	3
1-2	1
2-4	5
3-si	1
3-2	2
4-si	5

A folyam értéke 6

Most már nem találunk a nyelőig vezető javító láncot, tehát a maximális folyam értéke 6. A minimális vágást a V' = {3, 2, 4, si} ponthalmaz adja. A vágás kapacitását az (1, 3), (1, 2), (so, 2) éleken képzett 3 + 1 + 2 = 6 összeg adja, és ez azonos a folyam értékével.

2. max $z = x_0$

f. f. $x_{so,1} \le 2,\ x_{12} \le 4,\ x_{1,si} \le 3, x_{2,si} \le 2,\ x_{23} \le 1, x_{3,si} \le 2, x_{so,3} \le 1$

$x_0 = x_{so,1} + x_{so,3}$ (Forrás)

$x_{so,1} = x_{1,si} + x_{12}$ (1-es csúcs)

$x_{12} = x_{23} + x_{2,si}$ (2-es csúcs)

$x_{23} + x_{so,3} = x_{3,si}$ (3-as csúcs)

$x_{1,si} + x_{2,si} + x_{3,si} = x_0$ (Nyelő)

Minden változó ≥0

Az induló folyam értéke mindegyik élen 0. Megcímkézzük a nyelőt az (so, 1)-(1, 2)-(2, 3)-(3, si) útvonallal. A felsorolt éleken 1 egységgel növelhető a folyam értéke, és így a következő lehetséges folyamhoz jutunk:

Él	A folyam értéke
(so,1)	1
(so,3)	0
(1,2)	1
(1,si)	0
(2,3)	1
(2,si)	0
(3,si)	1
A nyelőbe érkezik	1

Következő lépésként az (so, 1)-(1, 2)-(2, si) útvonalat választjuk, és ezeken az éleken 1-gyel növeljük a folyam értékét. Eredményül a következő lehetséges folyam adódik:

Él	A folyam értéke
(so,1)	2
(so,3)	0
(1,2)	2
(1,si)	0
(2,3)	1
(2,si)	1
(3,si)	1
A nyelőbe érkezik	2

Ezután az (so, 3)-(3, si) útvonallal érjük el a nyelőt, és a felsorolt éleken 1-gyel növeljük a folyam értékét. Az alábbi lehetséges folyam adódik:

Él	A folyam értéke
(so,1)	2
(so,3)	1
(1,2)	2
(1,si)	0
(2,3)	1
(2,si)	1
(3,si)	2
A nyelőbe érkezik	3

Most már nem tudjuk megcímkézni a nyelőt, tehát maximális folyamhoz jutottunk. A V' = {1, 2, 3, si} csúcshalmaz egy minimális vágást határoz meg ((so, 1) és (so, 3) a vágás élei). A vágás kapacitésa 2+1=3 azonos a maximális folyam értékével.

3. max $z = x_0$

f.h. $x_{so,1} \le 1$, $x_{so,2} \le 3$, $x_{13} \le 4$, $x_{12} \le 3$, $x_{3,\,si} \le 1$, $x_{2,si} \le 2$

$x_0 = x_{so,1} + x_{so,2}$ (Forrás)

$x_{so,1} = x_{13} + x_{12}$ (1-es csúcs)

$x_{12} + x_{so,2} = x_{2,si}$ (2-es csúcs)

$x_{13} = x_{3,si}$ (3-as csúcs)

$x_{3,si} + x_{2,si} = x_0$ (Nyelő)

Mindegyik változó ≥ 0

Legyen induláskor mindegyik élen 0 a folyam értéke, és címkézzük meg a nyelőt az (so-2)-(2-si) útvonallal. Mindkét élen 2-vel növeljük a folyam értékét. Ezáltal a következő lehetséges folyampot kapjuk.

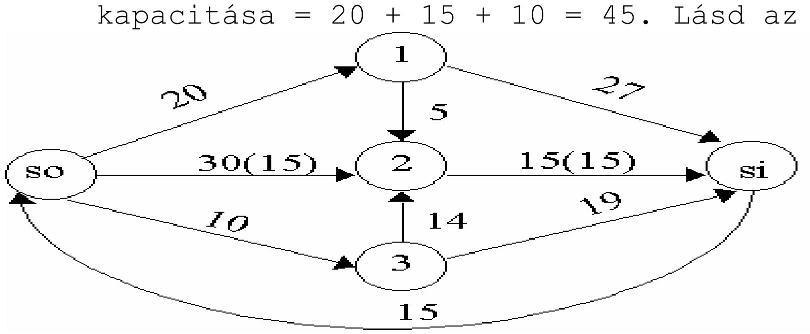
so-1	0
so-2	2
1-2	0
1-3	0
2-si	2
3-si	0
A nyelőbe érkezik	2

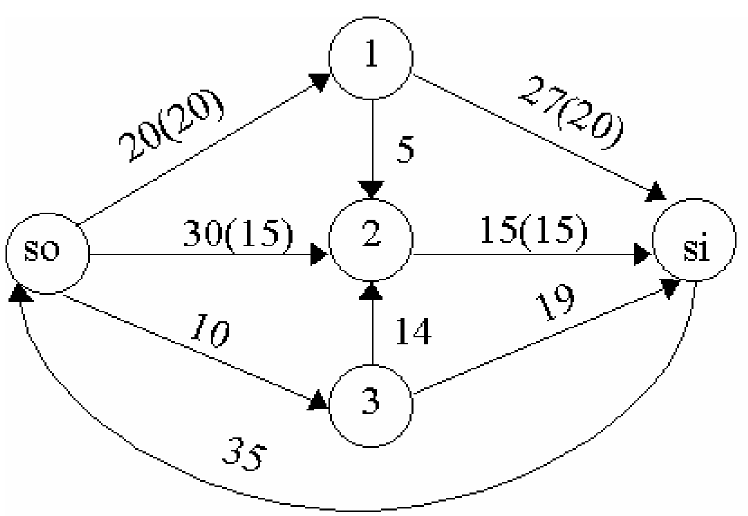
Válasszuk ezután a nyelőbe vezető (so, 1)-(1, 3)-(3, si) útvonalat, és növeljük 1-gyel a foyam értékét a felsorolt éleken. Ezáltal az alábbi lehetséges folyam adódik:

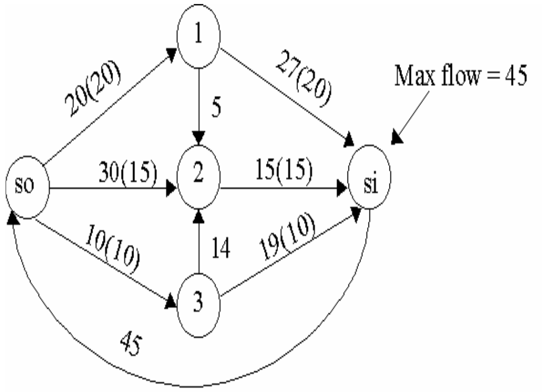
so-1	1
so-2	2
1-2	0
1-3	1
2-si	2
3-si	1
A nyelőbe érkezik	3

Most már nem lehet megcímkéznia nyelőt, tehát maximális folyamhoz jutottunk. A V' = {si} csúcshalmaz egy minimális vágást határoz meg, melynek az élei (3, si) és (2, si). A vágás kapacitása 1+2 = 3 azonos a maximális folyam értékével.

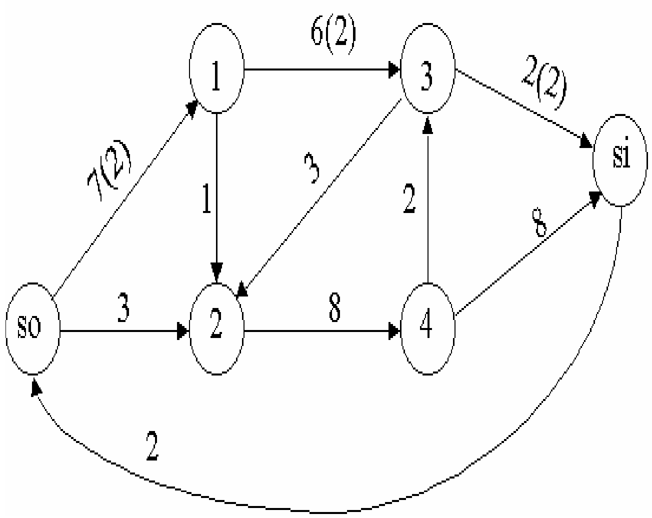
4. A maximális folyam értéke 45. Az {1, 3,si} csúcsokból álló halmaz minimális vágást határoz meg. A vágás kapacitása = 20 + 15 + 10 = 45. Lásd az alábbi ábrákat.

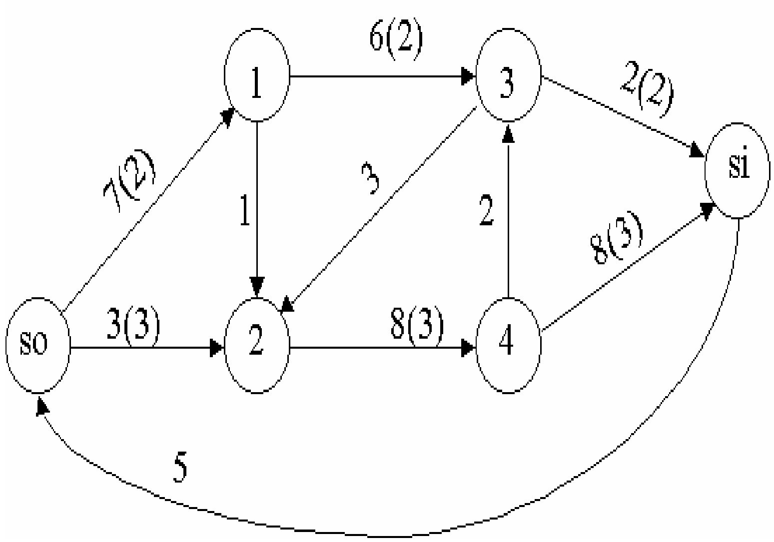


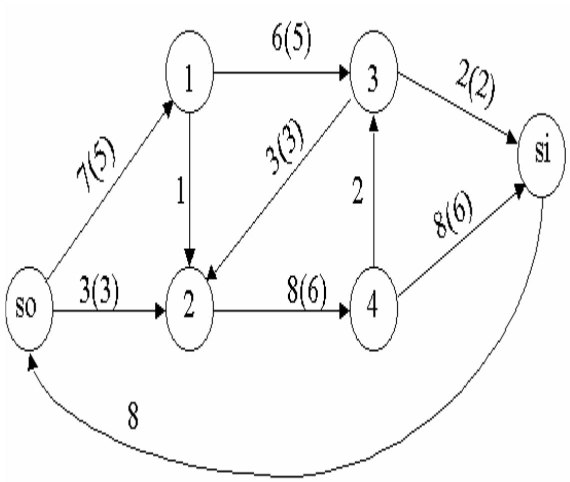


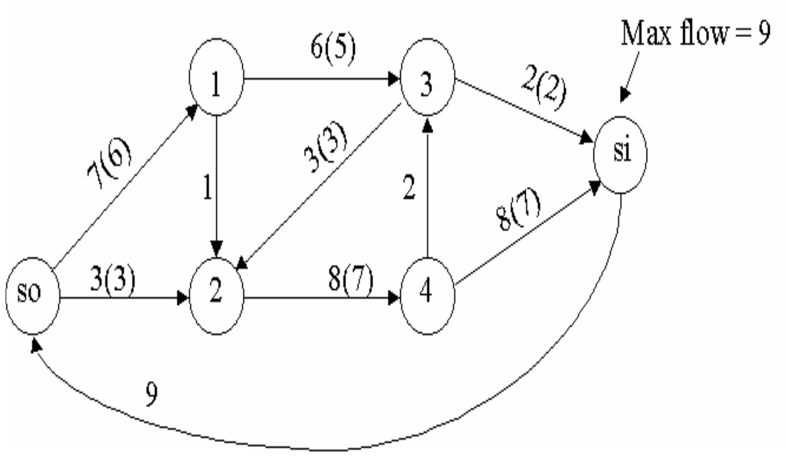


5. A maximális folyam értéke 9. A {2, 4, si} csúcshalmaz egy minimális vágást határoz meg. A vágás kapacitása 3 + 1 + 3 + 2 = 9. Lásd az alábbi ábrákat.

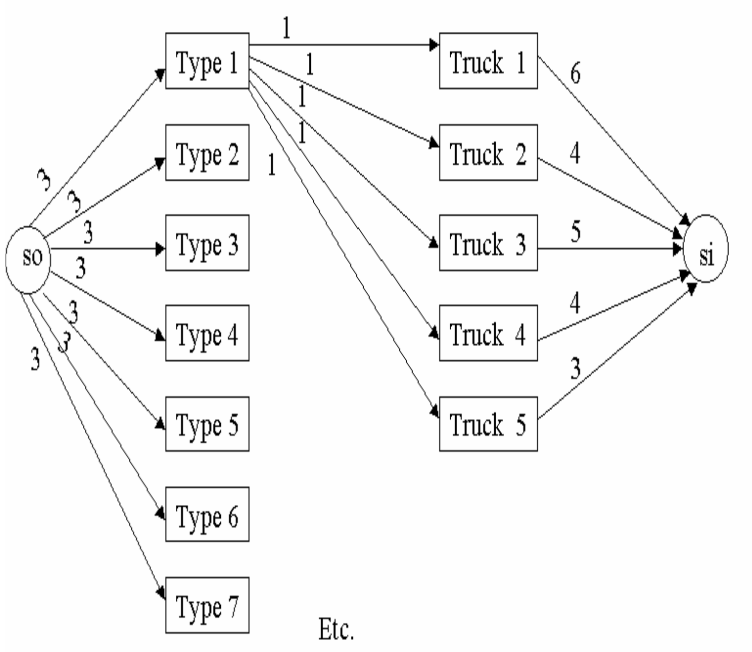






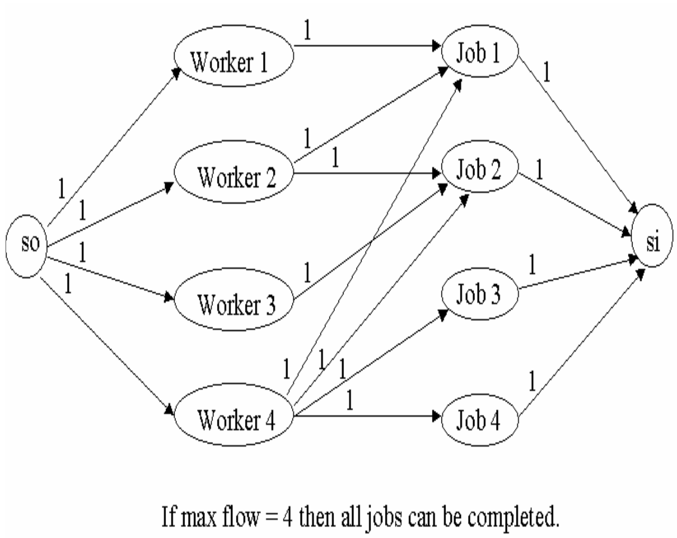


6. A megoldás az ábrán látható. Ha a maximális folyam értéke = 21, akkor valamennyi csomagot fel lehet pakolni.

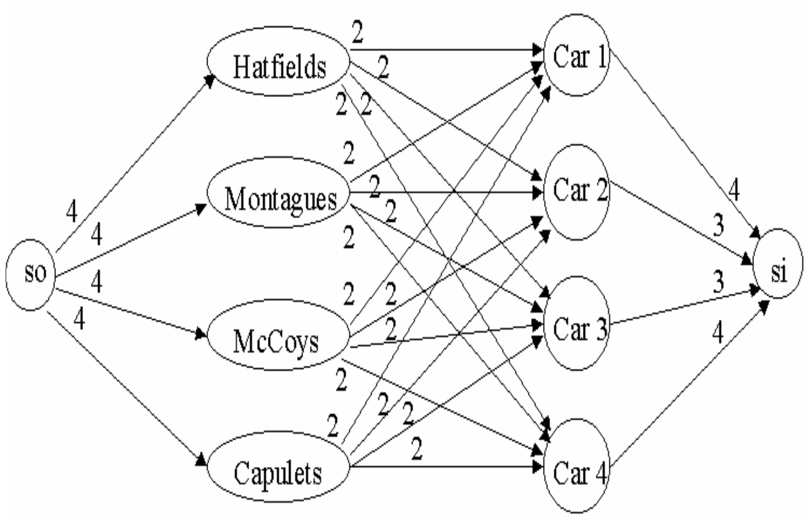


An arc of capacity 1 goes from each 'Type' node to each 'Truck' node.

7. A megoldás az alábbi ábrán látható. Ha a maximális folyam értéke 4, akkor el tudják végezni valamennyi feladatot.



8. A megoldást az alábbi ábra mutatja.



9. 1. lépés: Növeljük 4 egységgel a folyam értékét az so-1-3-si útvonal mentén.
2. lépés: Növeljük 2 egységgel a folyam értékét az so-2-4-si útvonal mentén.
3. lépés: Növeljük 1 egységgel a folyam értékét az so-2-4-

3-si lánc mentén.

4. lépés: Növeljük 1 egységgel a folyam értékét az so-2-1-3-si lánc mentén.

Most nem tudjuk megcímkézni a nyelőt. A maximális folyam értéke 8. A 3-si és 4-si élek egy minimális vágás élei, a vágás kapacitása 8. A folyam értéke az egyes éleken a következő:

Él	A folyam értéke
so,1	4
so,2	4
2,1	1
1,3	5
1,4	0
2,4	3
3,si	6
4,3	1
4,si	2

10. 1. lépés: Növeljük 7 egységgel a folyam értékét az so-2-si útvonal mentén.

2. lépés: Növeljük 6 egységgel a folyam értékét az so-1-3-si útvonal mentén.

3. lépés: Növeljük 6 egységgel a folyam értékée az so-4-si útvonal mentén.

Most nem tudjuk megcímkézni a nyelőt. A maximális folyam értéke 19. A V' = {si} csúcshalmaz egy minimális vágást határoz meg, melynek az élei (3, si), (2, si) és (4, si). A vágás kapacitása 6+7+6=19.

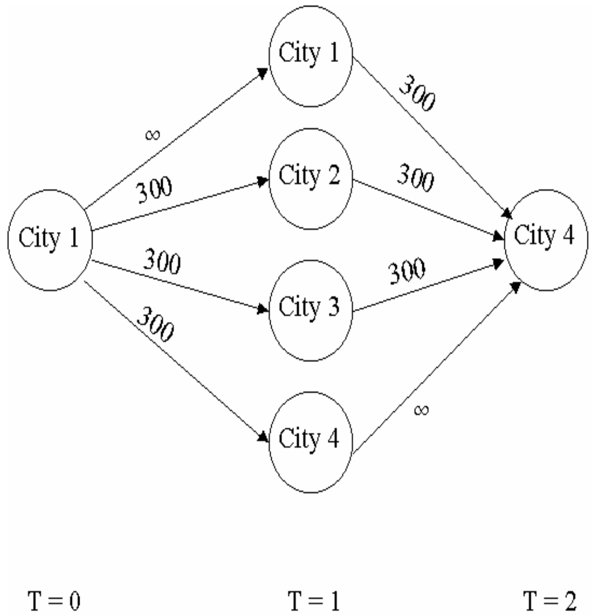
Él	A folyam értéke
so,1	6
so,2	7
so,4	6
1,3	6
2,si	7
3,si	6
4,si	6

11. Legyen a maximális folyam értéke k. Minden egyes lépésnél a nyelőbe érkező folyamérték legalább 1-gyel nő, a növekedés értéke egész. Ezért legfeljebb k iteráció után a Ford-Fulkerson eljárás maximális folyamot ad. A folyam értékét minden lépésben egész számmal növeljük (bizonyos éleken csökkentjük), ezért a végeredmény is egészértékű lesz.

12. A hálózatot kiegészítjük egy "szuperforrással", amelyből végtelen kapacitású él vezet mindegyik valódi forráshoz. Készítünk ezenkívül egy "szupernyelőt”, amelyikbe végtelen kapacitású él vezet mindegyik valódi nyelőből.

13. Tegyük fel, hogy az i csúcsba érkező folyamérték nem lehet nagyobb 10 egységnél. Egészítsük ki a hálózatot egy új i' csúccsal. Cseréljük az eredeti hálózat (j,i) típusú éleit (j,i')-re, és húzzunk be egy 10 egység kapacitású (i',i) élt. Ezáltal biztositva lesz, hogy az I csúcsba érkező folyam értéke nem haladja meg a 10 egységet.

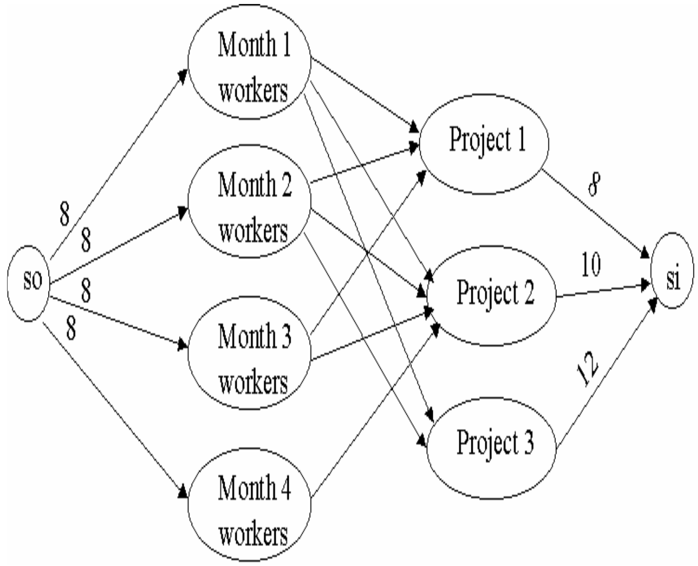
14. A megoldást az alábbi ábra mutatja.



15. Tekintsük a 25. ábrát! Legyen F a járatok egy halmaza, CUTF pedig az a vágás, amit a nyelő, az F-hez nem tartozó járatokat képviselő csúcsok és az F által nem érintett repülőtereket képviselő csúcsok halmaza határoz meg. Ekkor a CUTF vágás élei a nyelőből az F-en kívüli járatokat képviselő csúcsokba vezető élek, valamint az F-beli járatok által érintett repülőterekből a nyelőbe vezető élek. Ekkor

CutF kapacitása = (az F-hez nem tartozó járatokból származó árbevétel) + (az F járatai által érintett repülőterek költségei).
Emiatt
(F-ből származó nyereség) = (összes járatból származó árbevétel) - (CUTF kapacitása).
Ezért a járatoknak az az F' halmaza, amelyik minimális kapacitású CUTF' –hez tartozik, maximalizálni fogja a nyereséget. Megjegyezzük, hogy a hálózatban olyan vágások is vannak, melyek semelyik járatokból álló F halmaz CUTF vágásával nem azonosak, eteknek a vágásoknak azonban végtelen a kapacitása. Ezért a minimális vágás valamelyik járatokból álló F' halmazhoz tartozó CUTF' vágással azonos. Ha megtaláltuk a minimális vágást, akkor a légitársaság számára egyértelmű, hogy a járatoknak melyik halmaza fogja maximalizálni a nyereséget.

16. Minden olyan élnek, amelyik az i-edik havi munkásoktól a j-edik projekthez vezet 6 a kapacitása. Akkor tudjuk valamennyi projektet befejezni, ha a forrásból a nyelőbe vezető maximális folyam értéke 30.



7.4 Alfejezet

1. ET(2) kiszámításához szükségünk lenne ET(4) értékére. Ugyanakkor ET(4)-et csak ET(3) ismeretében határozhatjuk meg. ET(3) kiszámításához azonban ismernünk kell ET(2) értékét. A problémát az okozza, hogy van olyan él, amelyik egy magasabb sorszámú csúcsból (4) egy alacsonyabb sorszámú csúcsba mutat (2).

2.	Tevékenység	Közvetlen előzmények	Időtartam (hetek)
	A = Tervezés	-	5
	B = A gyártása	A	4
	C = B gyártása	A	5
	D = C gyártása	A	3
	E = A tesztelése	B	2
	F = A és B összeszerelése	C,E	2
	G = C rögzítése	D,F	1
	H = A termék tesztelése	G	1

A projekt diagramból az alábbi adatokat kapjuk

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 0	MH(1,2) = 0
ET(2) = 5	LT(2) = 5	TH(2,3) = 0	MH(2,3) = 0
ET(3) = 9	LT(3) = 9	TH(3,4) = 0	MH(3,4) = 0
ET(4) = 11	LT(4) = 11	TH(2,4) = 1	MH(2,4) = 1

ET(5) = 13	LT(5) = 13	TH(4,5) = 0	MH(4,5) = 0
ET(6) = 14	LT(6) = 14	TH(2,5) = 5	MH(2,5) = 5
ET(7) = 15	LT(7) = 15	TH(5,6) = 0	MH(5,6) = 0
		TH(6,7) = 0	MH(6,7) = 0

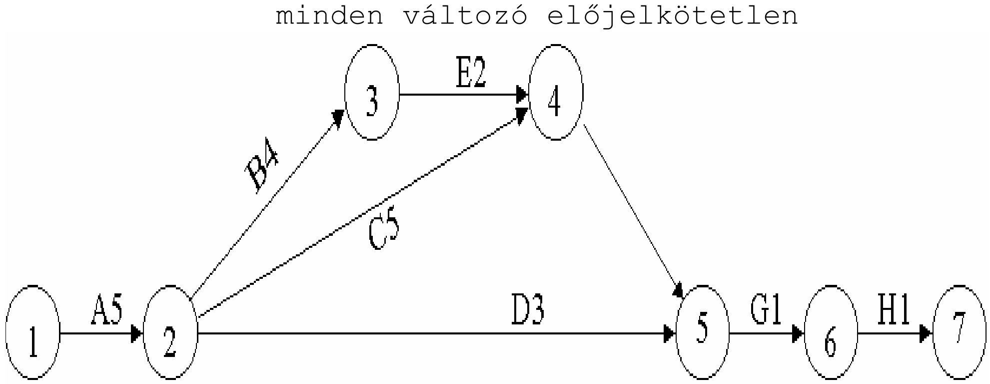
Végignézve azokat a tevékenységeket, melyeknek a tűréshatára (TH) 0, azt kapjuk, hogy a kritikus út az 1-2-3-4-5-6-7 útvonal, aminek a hossza 15 hét.

A megfelelő LP feladat az alábbi

$$\min z = x_7 - x_1$$

f.h.
$$x_2 \geq x_1 + 5$$
$$x_3 \geq x_2 + 4$$
$$x_4 \geq x_3 + 2$$
$$x_4 \geq x_2 + 5$$
$$x_5 \geq x_2 + 3$$
$$x_5 \geq x_4 + 2$$
$$x_6 \geq x_5 + 1$$
$$x_7 \geq x_6 + 1$$

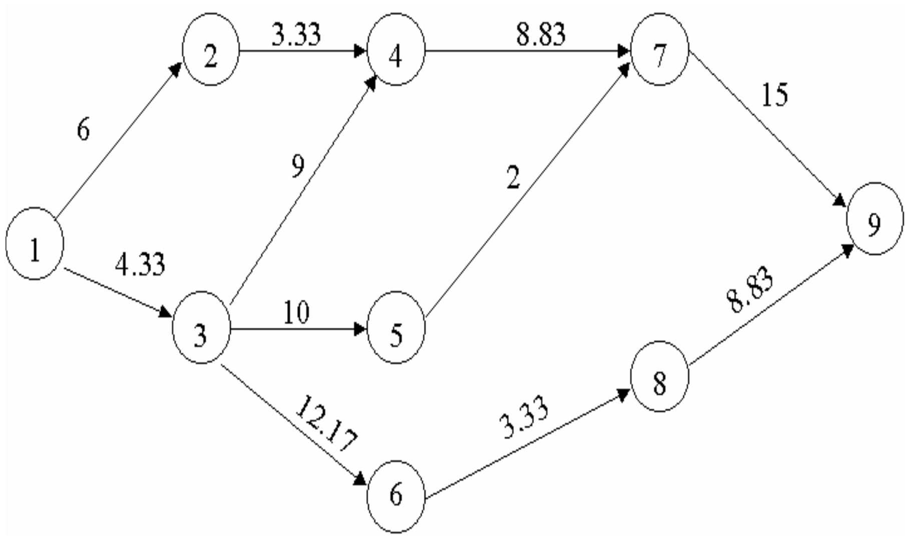
minden változó előjelkötetlen



3.A projekt diagramban mindegyik tevékenység átlagos időtartamával számolunk. Az egyes tevékenységek időtartamaira vonatkopzik az alábbi táblázat

Tevékenység	Átlagidő	Variancia
(1,2)	6	0.44
(1,3)	4.33	1
(2,4)	3.33	1
(3,4)	9	1
(3,5)	10	2.78
(3,6)	12.17	3.36
(4,7)	8.83	1.36

(5,7)	2	0.11
(6,8)	3.33	0.44
(7,9)	15	2.78
(8,9)	8.83	0.69



A projek diagramból a következőket kapjuk

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 4	MH(1,2) = 0
ET(2) = 6	LT(2) = 10	TH(1,3) = 0	MH(1,3) = 0
ET(3) = 4.33	LT(3) = 4.33	TH(2,4) = 4	MH(2,4) = 4
ET(4) = 13.33	LT(4) = 13.33	TH(3,4) = 0	MH(3,4) = 0
ET(5) = 14.33	LT(5) = 20.16	TH(3,5) = 5.83	MH(3,5) = 0
ET(6) = 16.5	LT(6) = 25	TH(3,6) = 8.5	MH(3,6) = 0
ET(7) = 22.16	LT(7) = 22.16	TH(4,7) = 0	MH(4,7) = 0
ET(8) = 19.83	LT(8) = 28.33	TH(5,7) = 5.83	MH(5,7) = 5.83
ET(9) = 37.16	LT(9) = 37.16	TH(6,8) = 8.5	MH(6,8) = 0
		TH(7,9) = 0	MH(7,9) = 0
		TH(8,9) = 8.5	MH(8,9) = 8.5

Tehát a kritikus út az 1-3-4-7-9 útvonal. A projekt várható időtartama 4.33 + 9 + 8.83 + 15 = 37.16, a projekt időtartamának varianciája pedig 1 + 1 + 1.36 + 2.78 = 6.14.

Mivel a kritikus út hosszának a szórása $6.14^{1/2}$ = 2.48, ezért

$$P(CP \le 40) = P\left(\frac{\mathbf{CP} - 37.16}{2.48} \le \frac{40 - 37.16}{2.48}\right) =$$

$= P(\mathbf{Z} \le 1.15) = .875$.

Másik lehetséges módszerként használhatjuk a következő EXCEl képletet: NORMDIST(40,37.16,2.48,1)= .875.

A kritikus utat megkaphatjuk az alábbi LP feladat megoldásával is:

$\min z = x_9 - x_1$

f.h. $x_2 \ge x_1 + 6$

$x_3 \ge x_1 + 4.33$

$x_4 \ge x_2 + 3.33$

$x_4 \ge x_3 + 9$

$x_5 \ge x_3 + 10$

$x_6 \ge x_3 + 12.17$

$x_7 \ge x_4 + 8.83$

$x_7 \ge x_5 + 2$

$x_8 \ge x_6 + 3.33$

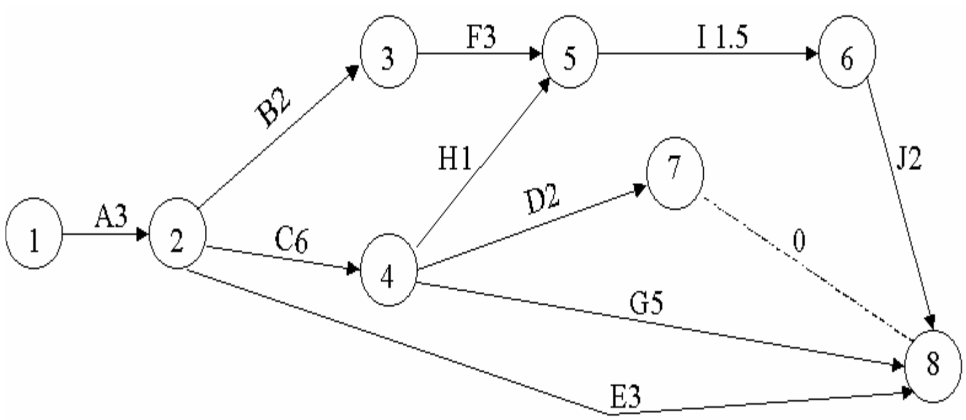
$x_9 \ge x_7 + 15$

$x_9 \ge x_8 + 8.83$

minden változó előjelkötetlen

4a. A megoldást az alábbi ábra mutatja

4b. Az egyes tevékenységek időtartamai:



Tevékenység	Átlagidő	Variancia
(1,2)	3	0.11
(2,3)	2	0.11
(2,4)	6	1.78
(4,7)	2	0.11
(2,8)	3	0.44
(3,5)	3	0.11
(4,8)	5	0.44
(4,5)	1	0.03

(5,6)	1.5	0.03
(6,8)	2	0.11
(7,8)	0	0.00
()		

A projekt diagramból azt kapjuk, hogy

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 0	MH(1,2) = 0
ET(2) = 3	LT(2) = 3	TH(2,3) = 2.5	MH(2,4) = 0
ET(3) = 5	LT(3) = 7.5	TH(2,4) = 0	MH(2,4) = 0
ET(4) = 9	LT(4) = 9	TH(4,7) = 3	MH(4,7) = 0
ET(5) = 10	LT(5) = 10.5	TH(2,8) = 8	MH(4,8) = 0
ET(6) = 11.5	LT(6) = 12	TH(3,5) = 2.5	MH(3,5) = 2.33
ET(7) = 11	LT(7) = 14	TH(4,8) = 0	MH(4,8) = 0
ET(8) = 14	LT(8) = 14	TH(4,5) = 0.5	MH(4,5) = 0
		TH(5,6) = 0.5	MH(5,6) = 0
		TH(6,8) = 0.5	MH(6,8) = 0
		TH(7,8) = 2.5	MH(7,8) = 2.5

1-2-4-8 a kritikus út, ennek a várható időtartama 3 + 6 + 5 = 14.

4c. A kritikus út hosszának varianciája 0.11 + 1.78 + 0.44 = 2.33. Ezért a kritikus út hosszának szórása $2.33^{1/2}$ = 1.53. Legyen a **D** valószínűségi változó értéke a projekt időtartama, d pedig az a szám, amelyre a projekt időtartama 99% valószínűséggel nem több d napnál. Ekkor
$P(\mathbf{D} \le d) = .99$ vagyis

$$P\left(\frac{D-14}{1.53} \le \frac{d-14}{1.53}\right) = .99.$$

Táblázatból megállapítható, hogy F(2.33) = .99. Használhatjuk a következő Ecel-függvényt is: NORMINV(.99,14,1.53)= 17.56

Ezért $\frac{d-14}{1.53} = 2.33$ tehát d = 17.56

Ha Június 13-án kezdjük a munkát, akkor 18 nap áll rendelkezésre a projekt befjezéséhez. Számításaink szerint, ha elkezdjük a munkát június 13-án, akkor 99% valószínűséggel befejezzük a projektet június 30-án estére.

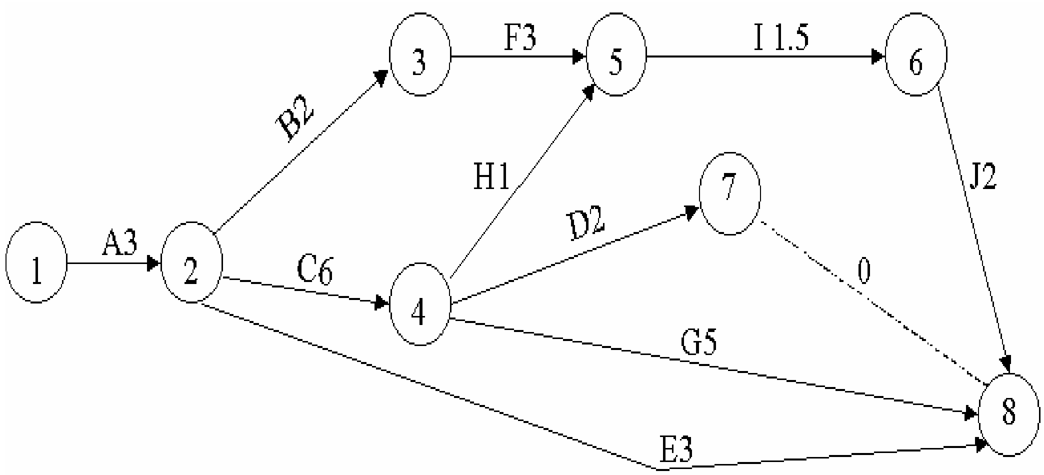
4d.

$\min z = x_8 - x_1$

f.h. $x_2 \ge x_1 + 3$

$x_3 \ge x_2 + 2$

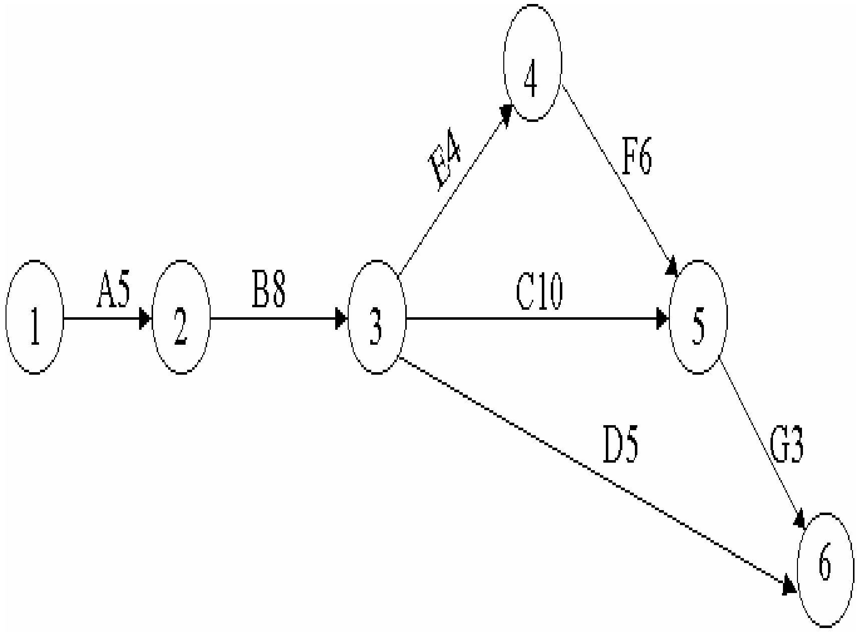
$x_4 \geq x_2 + 6$ $x_8 \geq x_7$
$x_5 \geq x_4 + 1$
$x_5 \geq x_3 + 3$
$x_6 \geq x_5 + 1.5$
$x_7 \geq x_4 + 2$
$x_8 \geq x_2 + 3$
$x_8 \geq x_4 + 5$
$x_8 \geq x_6 + 2$
minden változó eljelkötetlen



5a.A projekt diagram alapján

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 0	MH(1,2) = 0
ET(2) = 5	LT(2) = 5	TH(2,3) = 0	MH(2,3) = 0
ET(3) = 13	LT(3) = 13	TH(3,5) = 0	MH(3,5) = 0
ET(4) = 17	LT(4) = 17	TH(3,6) = 8	MH(3,6) = 8
ET(5) = 23	LT(5) = 23	TH(3,4) = 0	MH(3,4) = 0
ET(6) = 26	LT(6) = 26	TH(4,5) = 0	MH()4,5 = 0

1-2-3-5-6 és 1-2-3-4-5-6 egyaránt kritikus út, mindkettőnek 26 nap a hossza.



5b. Legyen A = azon napok száma, amennyivel az A tevékenység időtartamát csökkentjük, és így tovább. Jelöljük x_j -vel a j csúcshoz tartozóesemény bekövetkezésének időpontját!

$$\min z = 30A + 15B + 20C + 40D + 20E + 30F + 40G$$

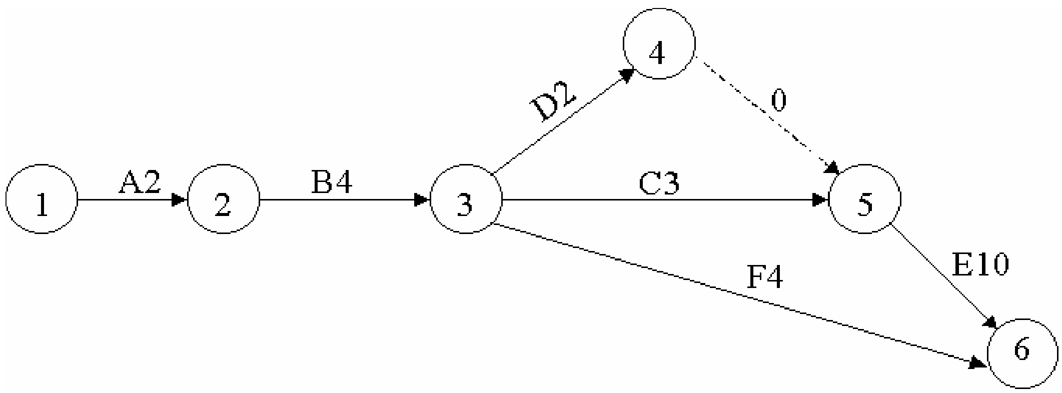
f.h
$$A \le 2,\ B \le 3,\ C \le 1,\ D \le 2,\ E \le 2,\ F \le 3,\ G \le 1$$
$$x_2 \ge x_1 + 5 - A$$
$$x_3 \ge x_2 + 8 - B$$
$$x_4 \ge x_3 + 4 - E$$
$$x_5 \ge x_3 + 10 - C$$
$$x_5 \ge x_4 + 6 - F$$
$$x_6 \ge x_5 + 3 - G$$
$$x_6 \ge x_3 + 5 - D$$
$$x_6 - x_1 \le 20$$
$A,B,C,D,E,F,G \ge 0$, x_j előjelkötetlen

6a. A projekt diagram alapján

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 0	MH(1,2) = 0
ET(2) = 2	LT(2) = 2	TH(2,3) = 0	MH(2,3) = 0
ET(3) = 6	LT(3) = 6	TH(3,5) = 0	MH(3,5) = 0
ET(4) = 8	LT(4) = 9	TH(3,4) = 1	MH(3,4) = 0
ET(5) = 9	LT(5) = 9	TH(3,6) = 9	MH(3,6) = 9

ET(6) = 19	LT(6) = 19	TH(5,6) = 0	MH(5,6) = 0
		TH(4,5) = 1	MH(4,5) = 1

1-2-3-5-6 a kritikus út. A kritikus út hossza 19 nap.



6b. min $z = x_6 - x_1$

f.h. $x_2 \geq x_1 + 2$

$x_3 \geq x_2 + 4$

$x_4 \geq x_3 + 2$

$x_5 \geq x_3 + 3$

$x_5 \geq x_4$

$x_6 \geq x_5 + 10$

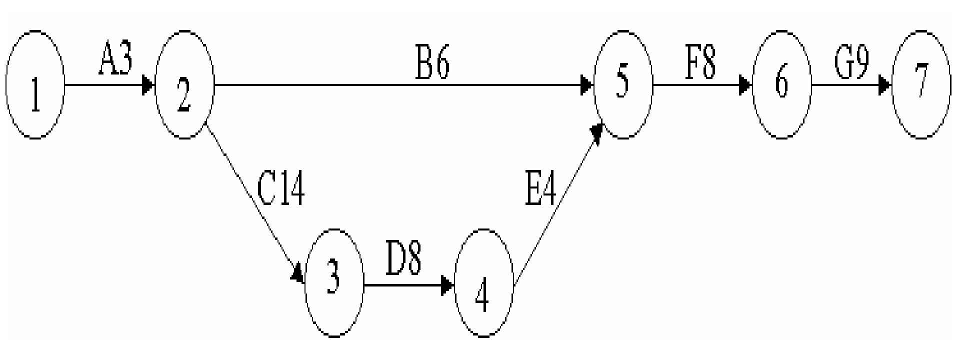
$x_6 \geq x_3 + 4$

x_j előjelkötetlen

7a. A projekt diagram alapján

ET(1) = 0	LT(1) = 0	TH(1,2) = 0	MH(1,2) = 0
ET(2) = 3	LT(2) = 3	TH(2,3) = 0	MH(2,3) = 0
ET(3) = 17	LT(3) = 17	TH(3,4) = 0	MH(3,4) = 0
ET(4) = 25	LT(4) = 25	TH(4,5) = 0	MH(4,5) = 0
ET(5) = 29	LT(5) = 29	TH(2,5) = 20	MH(2,5) = 20
ET(6) = 37	LT(6) = 37	TH(5,6) = 0	MH(5,6) = 0
ET(7) = 46	LT(7) = 46	TH(6,7) = 0	MH(6,7) = 0

1-2-3-4-5-6-7 a kritikus út, és ennek időtartama 46 nap. A kritikus utat megkaphatjuk a következő LP feladat megoldásával is:



min $z = x_7 - x_1$

f.h. $x_2 \geq x_1 + 3$

$x_3 \geq x_2 + 14$
$x_4 \geq x_3 + 8$
$x_5 \geq x_4 + 4$
$x_5 \geq x_2 + 6$
$x_6 \geq x_5 + 8$
$x_7 \geq x_6 + 9$
x_j előjelkötetlen

7b. min $z = 100A + 80B + 60C + 70D + 30E + 20F + 50G$

f.h. $A \leq 3$, $B \leq 4$, $C \leq 5$, $D \leq 2$, $E \leq 4$, $F \leq 4$, $G \leq 4$

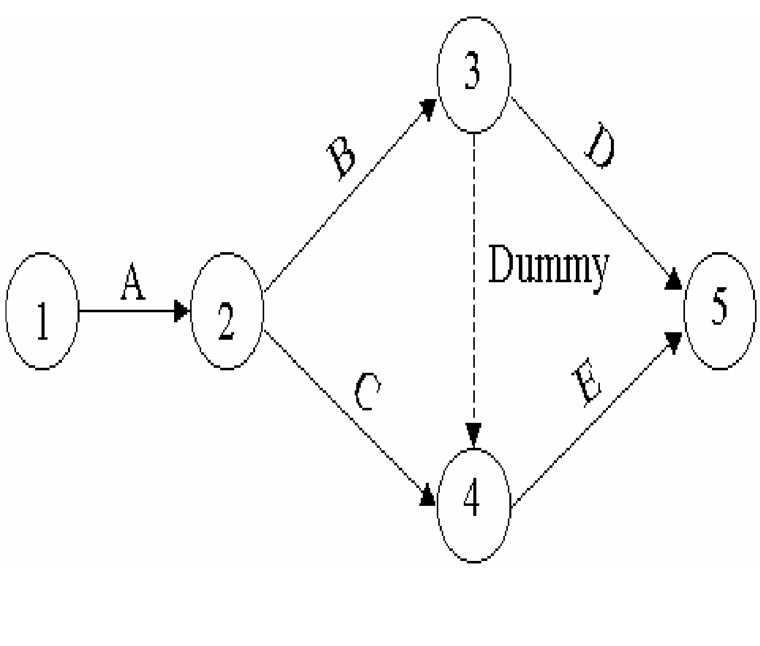
$x_2 \geq x_1 + 3 - A$
$x_3 \geq x_2 + 14 - C$
$x_4 \geq x_3 + 8 - D$
$x_5 \geq x_4 + 4 - E$
$x_5 \geq x_2 + 6 - B$
$x_6 \geq x_5 + 8 - F$
$x_7 \geq x_6 + 9 - G$
$x_7 - x_1 \leq 30$
$A, B, C, D, E, F, G, \geq 0$, x_j előjelkötetlen

8a. Figyelembevéve, hogy az LP feladat valamennyi korlátozó feltétele egy élt reprezentál, és hogy a korlátozó feltétel jobboldalán álló szám az élhez tartozó tevékenység időtartama, az 5. Feladat megoldásában található projekt diagramot kapjuk.

8b. Végignézve azokat a sorokat, amelyekhez tartozó duál-változó értéke -1, azt kapjuk, hogy 1-2- 3-4-5-6 egy kritikus út, a projekt hossza 26 nap, és az (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) valamint (5,6) élekhez tartozó tevékenységek kritkus tevékenységek.

9. Az $ET(j) \leq LT(j)$ egyenlőtlenségből az következik, hogy $MH(i, j) \leq TH(i, j)$ minden tevékenységre teljesül.

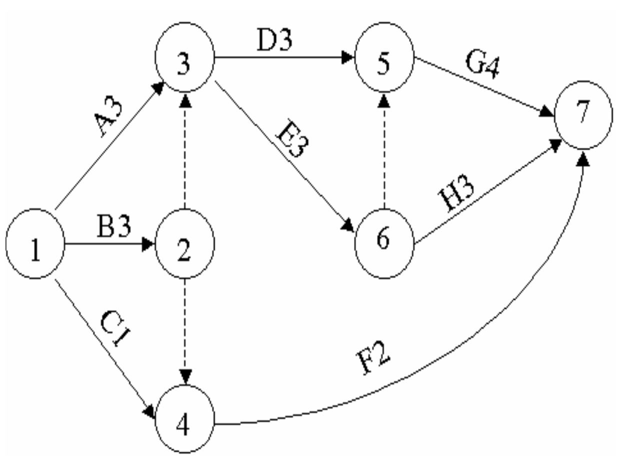
10. A megoldást az alábbi ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy a fiktív él nélkül megsértettük volna a 4. szabályt.



11. Legyen **CD** az 1-3-4 útvonal időtartama, **AB** pedig az 1-2-4 útvonal időtartama.
CD-vel kapcsolatban 9 azonos valószínűségű esemény következhet be; C időtartama lehet x időegység (x=5,6,7), és D időtartama lehet y időegység (y=7,8,9). Mindegyik x,y pár esetén a bekövetkezés valószínűsége 1/9.
Ezért
P(**CD** = 12) = 1/9, P(**CD** = 14) = 3/9, P(**CD** = 13) = 2/9 P(**CD** = 15) = 2/9, P(**CD** = 16) = 1/9.
HAsonlóan P(**AB** = 7) = 1/9, P(**AB** = 11) = 2/9, P(**AB** = 15) = 3/9, P(**AB** = 19) = 2/9, P(**AB** = 23) = 1/9
Annak a valószínűsége, hogy csak az 1-2-4 útvonal kritikus út, a következő
P(**CD** = 12)P(**AB**>12) + P(**CD** = 14)P(**AB**>14) + P(**CD** = 13)P(**AB**>13) +P(**CD** = 15)P(**AB**>15) +P(**CD** = 16)P(**AB**>16) = (1/9)(6/9) + (3/9)(6/9)
+(2/9)(6/9) + (2/9)(3/9) +(1/9)(3/9) = 15/27.
Annak a valószínűsége, hogy 1-2-4 és 1-3-4 egyaránt kritkus utak:
P(**AB** = 15)P(**CD** = 15) = 2/27.
Annak a valószínűsége, hogy 1-3-4 az egyetlen kritikus út:

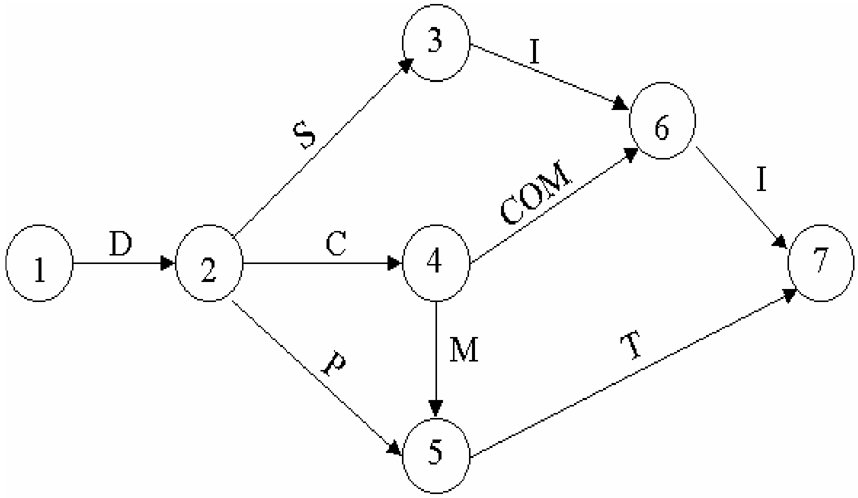
1 - 2/27 - 15/27 = 10/27

12a. A megfelelő projekt-diagramot az alábbi ábra tartalmazza.



12b. A-D-G, A-E-G, B-D-G és B-E-G egyaránk kritkus utak, mindegyik hossza 10.

13. A megoldást az alábbi ábra mutatja.



14. min z = 300A+200B+350C+260D+320E

f.h. $A\leq5$, $B\leq5$, $C\leq5$, $D\leq5$, $E\leq5$,

$x_3-x_1\leq90$,

$x_2\geq x_1 + 20 - A$

$x_3\geq x_1 + 25 - B$

$x_4\geq x_2 + 50 - C$

$x_4\geq x_3 + 40 - D$

$x_5\geq x_4 + 30 - E$

minden változó ≥0

15. ET(1) = 0, ET(2) = 2, ET(3) = 8, ET(4) = 6,
ET(5) = Max{ET(3)+4, ET(4)+2} = 12
ET(6) = Max{ET(3)+1, ET(5)+2, ET(4)+1} = 14
LT(6)=14, LT(5) = 12,
LT(4) = Min{LT(5)-2,LT(6)-1} = 10
LT(3) = Min{LT(5)-4,LT(6)-1} = 8
LT(2) = Min{LT(3)-6,LT(4)-4} = 2
LT(1) = LT(2) - 2 = 0
1-2-3-5-6 egy kritikus út(14 a hossza).

Él	TH	MH	
1,2	2-0-2=0	2-0-2=0	
2,3	8-2-6=0	8-2-6=0	
2,4	10-2-4=4	6-2-4=0	TH és MH különbözőek!
3,5	12-8-4=0	12-8-4=0	
3,6	14-8-1=5	14-8-1=5	
4,5	12-6-2=4	12-6-2=4	
4,6	14-6-1=7	14-6-1=7	
5,6	14-12-2=0	14-12-2=0	

16. ET(1) = 0, ET(2) = 3, ET(3) = 3+3=6, ET(4) = 3+3=6
ET(5) = Max{ET(3)+4 ,ET(2)+4, ET(4)+3} = 10
ET(6) = Max{ET(3)+5 , ET(5)+5} = 15
ET(7) = Max{ET(6)+6, ET(5)+4, ET(4) + 2} = 21
ET(8) = ET(7) + 6 = 27
LT(8) = 27, LT(7) = 27 - 6 = 21, LT(6) = 21 - 6 = 15
LT(5) = Min{LT(7)-4, LT(6)-5} = 10
LT(4) = 10 - 3 = 7
LT(3) = Min{LT(6)-5,LT(5)-4} = 6
LT(2) = Min{LT(5)-4, LT(4)-3, LT(3)-3} = 3
LT(1) = 3 - 3 = 0

Él	TH	MH	
1,2	3-0-3=0	3-0-3=0	
2,3	6-3-3=0	6-3-3=0	
2,4	7-3-3=1	6-3-3=0	TH és MH különbözőek!
2,5	10-3-4=3	10-3-4=3	
3,5	10-6-4=0	10-6-4=0	
3,6	15-6-5=4	15-6-5=4	
4,5	10-6-3=1	10-6-3=1	
4,7	21-6-2=13	21-6-2=13	
5,6	15-10-5=0	15-10-5=0	
5,7	21-10-4=7	21-10-4=7	
6,7	21-15-6=0	21-15-6=0	
7,8	27-21-6=0	27-21-6=0	

1-2-3-5-6-7-8 a kritikus út, 27 a hossza.

7.5 Alfejezet

1. $\min z = 4x_{12} + 3x_{24} + 2x_{46} + 3x_{13} + 3x_{35} + 2x_{25} + 2x_{56}$

f.h. $x_{12} + x_{13} = 1$ (1-es csúcs)

$x_{12} = x_{24} + x_{25}$ (2-es csúcs)

$x_{13} = x_{35}$ (3-as csúcs)

$x_{24} = x_{46}$ (4-es csúcs)

$x_{25} = x_{56}$ (5-ös csúcs)

$x_{46} + x_{56} = 1$ (6-os csúcs)

minden $x_{ij} \geq 0$

Ha $x_{ij} = 1$, akkor az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb út tartalmazni fogja az (i, j) élt, ugyanakkor $x_{ij} = 0$ esetén az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezetőlegrövidebb út nem tartalmazza az (i, j) élt.

2. Legyen y_{ij} az (I,j) élre felírt korláthoz tartozó duál változó. A CPM probléma LP alakjának duálisa a következő:

$$\max w = 6y_{13} + 9y_{12} + 8y_{35} + 7y_{34} + 10y_{45} + 12y_{56}$$

f.h. $-y_{13} - y_{12} = -1$

$y_{12} - y_{23} = 0$

$y_{13} + y_{23} - y_{35} - y_{34} = 0$

$y_{34} - y_{45} = 0$

$y_{35} + y_{45} - y_{56} = 0$

$y_{56} = 1$

minden $y_{ij} \geq 0$

Ez a feladat azzal ekvivalens, hogy olyan útvonalon akarunk 1 egységnyi folyamot az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba küldeni, melynek a hossza (a projekt diagramban szereplő költségeket összegezve) maximális. Ez egy MKHFP , hiszen mindegyik változó pontosan egy korlátozó feltételben szerepel +1 együtthatóval, és pontosan egy feltételben szerepel -1 együtthatóval is. A dualitás tétel szerint a fenti LP feladat optimális célfüggvényértéke azonos a kritikus út hosszával. Ezért egy projekt-hálózatban a kritikus út hossza és a leghosszab útvonal hossza azonos.

3. Csúcs Nettó kibocsátás

Detroit	6500
Dallas	6000
City 1	-5000
City 2	-4000
City 3	-3000
Fiktív	-500

Valamennyi Detroit-ból vagy Dallas-ból az 1-es, 2-es és 3-as városokba valamelyikébe vezető él kapacitása 2200. A többi él kapacitása korlátlan.

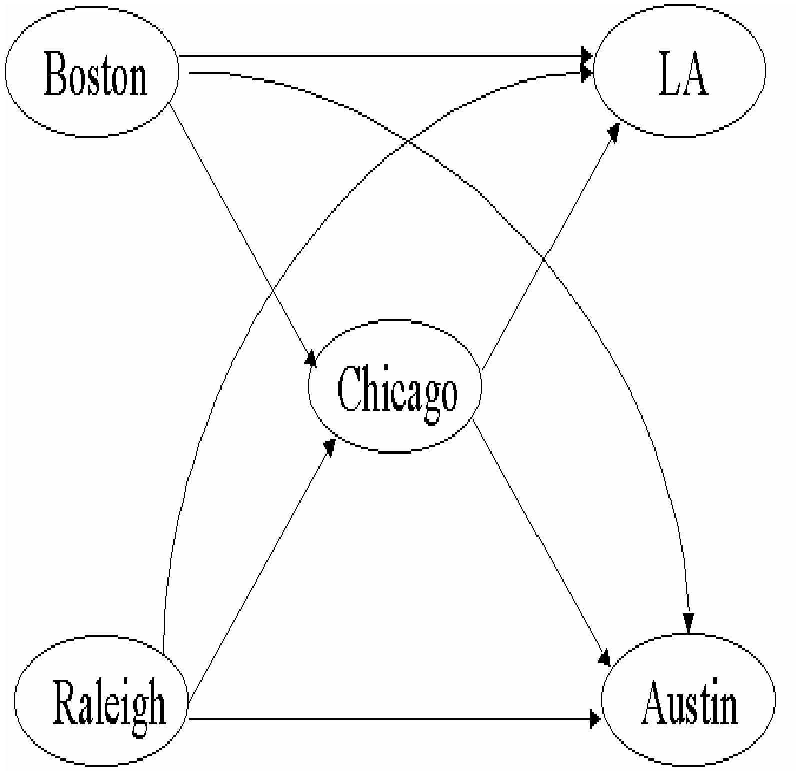
Él	Szállítási költség
Detroit-City 1	$2800
Detroit-City 2	$2600
Detroit-City 3	$2300
Detroit-Fiktív	$0
Dallas-City 1	$2300
Dallas-City 2	$2000
Dallas-City 3	$2000
Dallas-Fiktív	$0

4a. Mindegyik él kapacitása korlátlan

Él	Szállítási költség
Bos-Chic	800 + 80 = $880
Bos-Austin	800 + 220 = $1,020
Bos-LA	800 + 280 = $1,080
Ral-Chic	900 + 100 = $1,000
Ral-Aus	900 + 140 = $1,040
Ral-LA	900 + 170 = $1,070
Chic-Aus	$40
Chic-LA	$50

A feladat kiegyensúlyozott, ezért nincs szükség fiktív pontra.

Város	Nettó kibocsátás
Boston	400
Raleigh	300
Chicago	0
LA	-400
Austin	-300



4b. Ha legfeljebb 200 egység szállítható Chicago-n keresztül, akkor bővítsük az ábrát egy új Chicago' csúccsal. Töröljük a Raleigh-Chicago és Boston- Chicago éleket, és húzzuk be a következő éleket:

Él	Szállítási költség	Él kapacitása
Boston-Chicago'	\$880	∞
Raleigh-Chicago'	\$1000	∞
Chicago-Chicago'	0	200

5a. Nettó kibocsátás (Százezer hordó/nap)

SD	LA	Dallas	Houston	Chic	NY	Fiktív
5	4	0	0	-4	-3	-2

Az élek egységnyi költségei
SD-Dallas:\$420
SD-Houston:\$100
LA-Dallas:\$300
LA-Houston:\$110
SD-Fiktív:\$0
LA-Fiktív:\$0
Dallas - Chic.: 700 + 550 = \$1,250
Dall-NY:700 + 450 = \$1,150
Houston - Chic.: 900 + 530 = \$1,430
Hous. - N.Y.:900 + 470 = \$1,370

5b. Töröljük a Dallasba illetve Houstonba vezető éleket. Bővítsük a hálózatot az új Dallas' és Houston' csúcsokkal. Húzzuk be a következő éleket:

Él	Szállítási költség	Él kapacitás
LA-Dallas'	\$300	∞
SD-Dallas'	\$420	∞
LA-Houston'	\$110	∞

SD-Houston'	\$100	∞
Dallas'-Dallas	0	500
Houston'-Houston	0	500

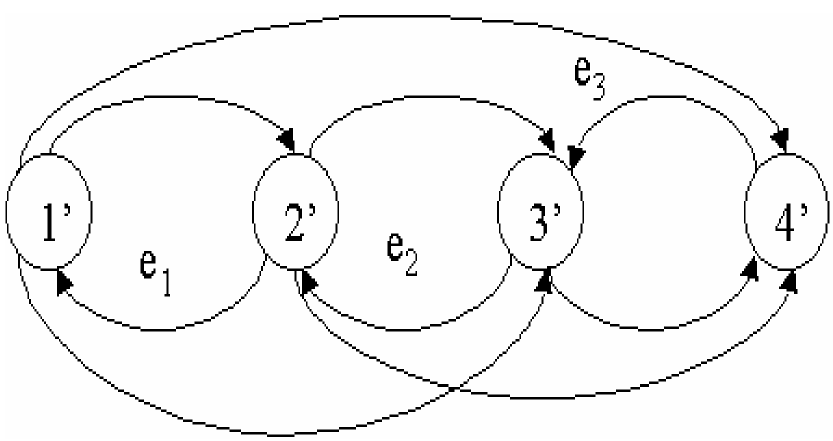
6. A célfüggvény az elbocsátás kötségeiből, a felvétel költségeiből és a bérköltségekből áll. (1) azt biztosítja, hogy az első hónapban legalább 20 munkás dolgozik. (2) miatt a második hónapban legalább 16 munkás dolgozik. (3) szerint a harmadik hónapban legalább 25 munkás dolgozik.

Az (i)-(iv) korlátozó feltételek illetve az (1)-(3) korlátozó feltételek ugyanazt a lehetséges halmazt jelölik ki. Ennek belátásához vegyük észre, hogy ha egy pont eleget tesz az (1)-(3) feltételeknek, akkor az (i)- (iv) feltételeket is kielégíti. Ha viszont egy pont kielégíti az (i)-(iv) feltételeket, akkor erre a pontra teljesül (1), teljesül (i) + (ii) = (2), és teljesül -(iv) = (3) is. Tehát a két LP feladat lehetséges tartománya azonos. Az (i)- (iv) feltételekhez tartozó együttható mátrix a következő:

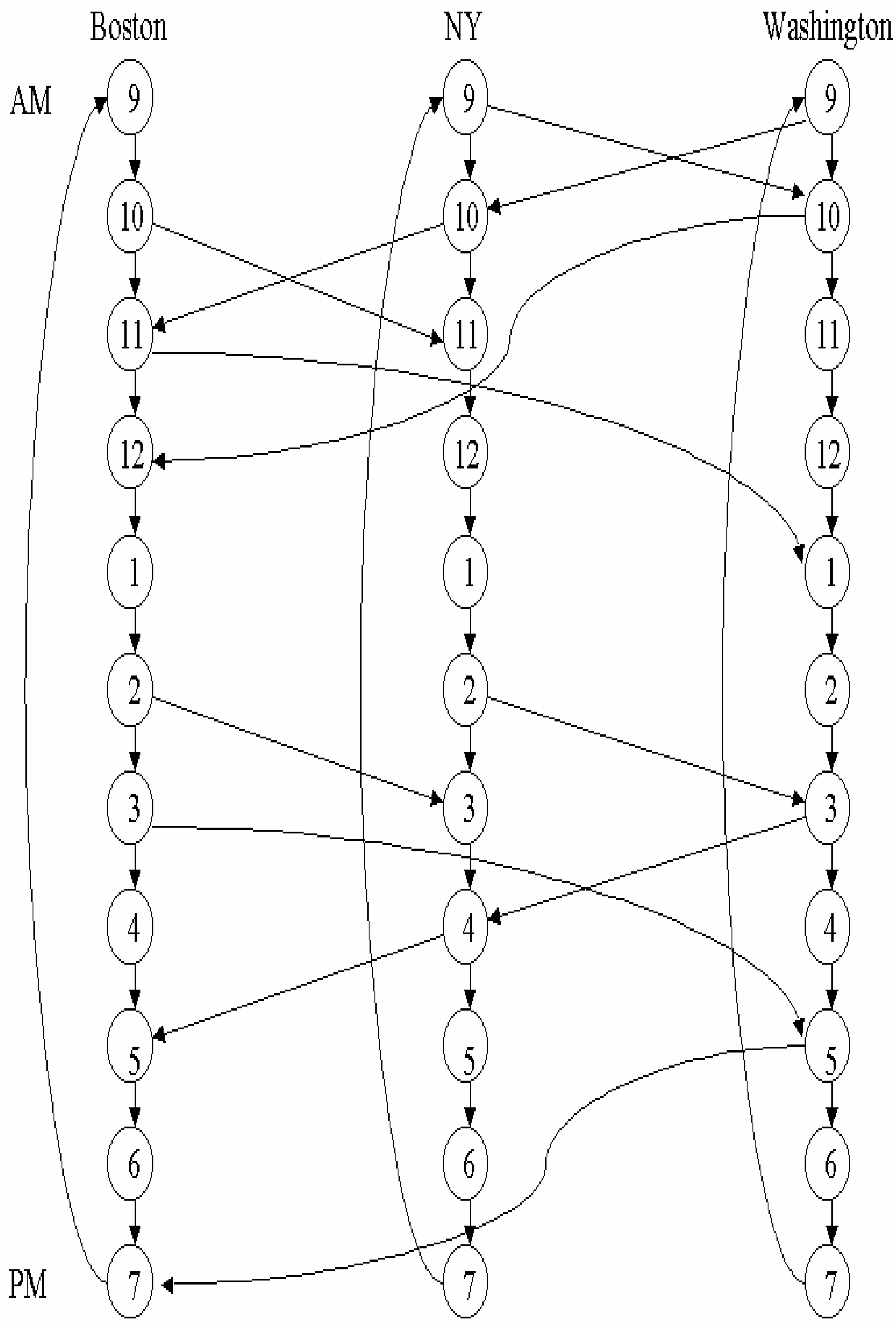
	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	e_1	e_2	e_3	j.o.
1'	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	20
2'	-1	0	0	1	1	0	1	-1	0	-4
3'	0	-1	0	-1	0	1	0	1	-1	9
4'	0	0	-1	0	-1	-1	0	0	1	-25

Mindegyik változónak pontosan egy feltételben van +1 együtthatója, és pontosan egy feltételben van -1 együtthatója, tehát ezek a feltételek az ábrán látható hálózat folyam-egyensúlyi egyenletei. Az e_1 változó a 2' csúcsból az 1' csúcsba áramló "folyamot" képviseli, az e_2 változó a 3' csúcsból a 2' csúcsba áramló "folyamot" képviseli, az e_3 változó pedig a 4' csúcsból a 3' csúcsba áramló "folyamot" értékét adja. Mindegyik él kapacitása korlátlan. A szállítási költségek az alábbiak:

Él	Szállítási költség	Él	Szállítási költség
1'-2'	50 + 100 + 140	4'-3'	0
1'-3'	50 + 100 + 280	3'-2'	0
1'-4'	100 + 420	2'-1'	0
2'-3'	50 + 100 + 140		
2'-4'	100 + 280		
3'-4'	100 + 140		



7. A feladat megoldása a következő ábrán látható



8. A hálózatban a következő csúcsok szerpelnek:

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday
Phil	Phil	Phil	Phil	Phil
NY	NY	NY	NY	NY
Wash	Wash	Wash	Wash	Wash

Mindegyik csúcsból 6 él indul ki, jelezve, hogy a teherautó meg van pakolva, vagy üres, és hogy hol lesz a teherautó holnap. Például a Hétfőn Philadelphia csúcsból a következő 6 él indul ki: P = Philadelphia N = New York W = Washington H = Hétfő, K = Kedd, stb.

	Az él költsége
HP-KP(megrakva)	\$700
HP-KP(üresen)	\$400
HP-KW(megrakva)	\$1000
HP-KW(üresen)	\$800
HP-KN(megrakva)	\$1000
HP-KN(üresen)	\$800

Azokon az éleken, melyek egy szállítási igény teljesítését képviselik, az alsó korlát = felső korlát = igény feltételeket rójuk ki. Például a HP-KN(megrakva) élen a felső korlát és az alsó korlát is 2. Az összes többi élen az alsó korlát 0, a felső korlát pedig ∞. Szükség van a péteki csúcsokból a hétfői csúcsokba mutató élekre is (minden pénteki csúcsból 6 él indul). Mindegyik csúcs nettó kibocsátása 0.

7.6 Alfejezet

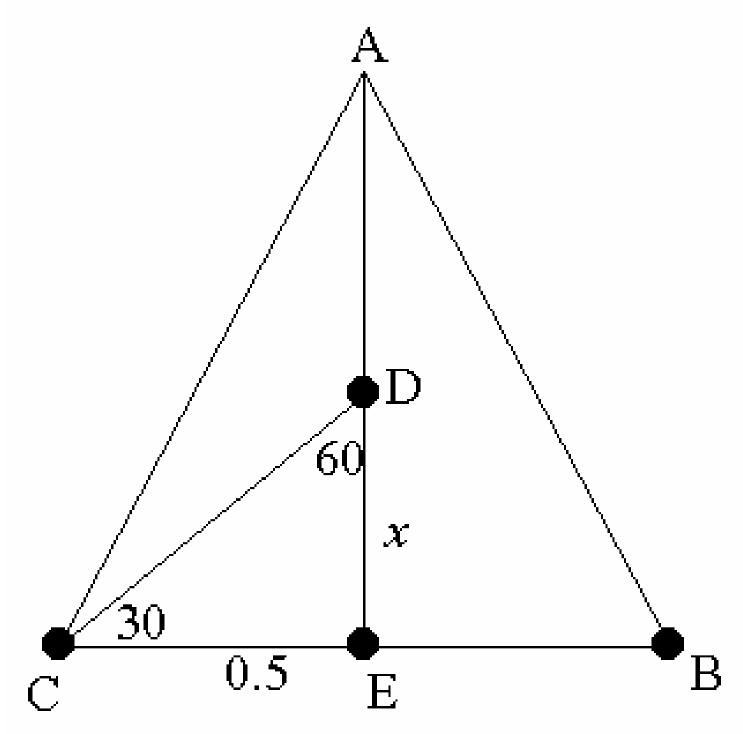
1. Gary-nél kezdjük, és behúzzuk a Gary-South Bend élt. Ezután a South Bend-Fort Wayne élt választjuk. Következő lépéskén behúzzuk a Gary-Terre Haute élt. Végül a Terre Haute-Evansville él következik. Ennek a minimális költségű feszítő fának a teljes hossza 58 + 79 + 164 + 113 = 414 mérföld.

2. Kezdjük az 1-es csúcsnál az (1,3) éllel. Ezután húzzuk be (egymásután) a (3,5), (3,4) és (3,2) éleket. A fa teljes hossza 15.

3. Ha a_t'-t a_t-vel helyettesítjük, ismét feszítő fához jutunk. (ez azért igaz mert a_t összeköti C_{t-1}-et C_{t-1}'-vel, tehát ismét el tudunk jutni bármelyik csúcsból bármelyik csúcsba). Az a_t–t tartalmazó feszítő fa rövidebb, mint az a_t'-t tartalmazó feszítő fa. Ezért az a_t'-t tartalmazó feszítő fa nem minimális. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy az algoritmus minimális feszítő fát ad.

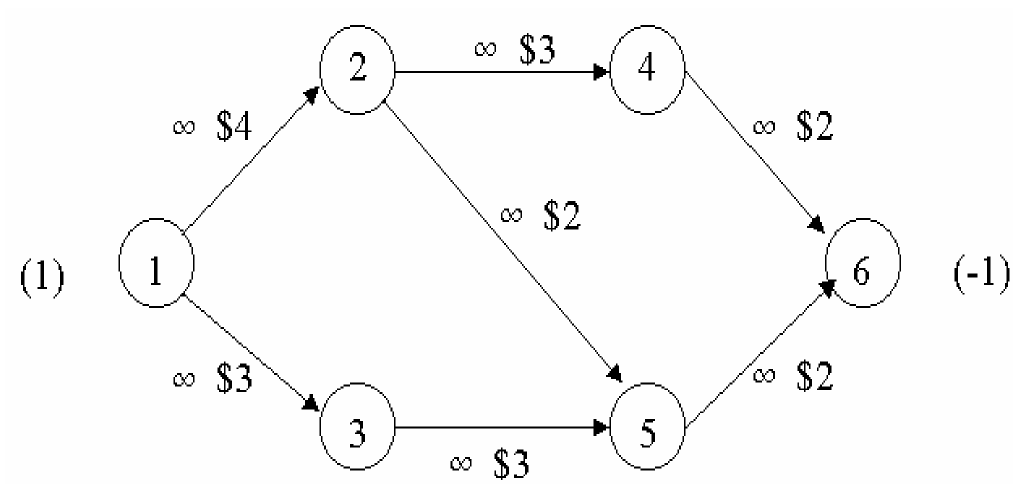
4a. A minimális feszítő fa hossza nyílvánvalóan 1+1 = 2.

4b. Tekintsük az alábbi ábrát! A minimális feszítő fa hossza AD+DC+DB=3DC. A CDE háromszög derékszögű, a DCE szög = 30 fok, a CDE szög pedig 60 fokos. A CE szakasz hossza 0.5. Jelöljük a De szakasz hosszát x-szel. Ekkor DC hossza $(0.25+x^2)^{1/2}$. Movel 30 fok szinusza 0.5, ezért $x/(.25+x^2)^{1/2} = 0.5$, amiből $x = 0.5*(3)^{-1/2}$. Tehát DC hossza $1/3^{1/2}$, tehát a minimális feszítő fa hossza $3DC = 3^{1/2}$, ami 13%-kal kisebb 2-nél!

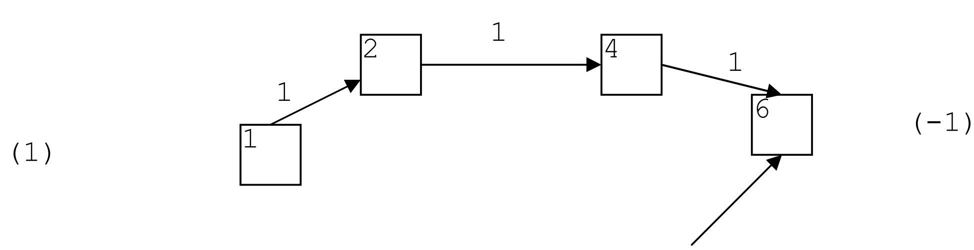


7.7 Alfejezet

1a.



1b. Egy lehetséges bázismegoldás a következő:



1c) Számítsuk ki az Y-okat!
$Y_1=0$, $Y_1-Y_2=4$, $Y_1-Y_3=3$, $Y_2-Y_4=3$, $Y_5-Y_6=2$, $Y_4-Y_6=2$

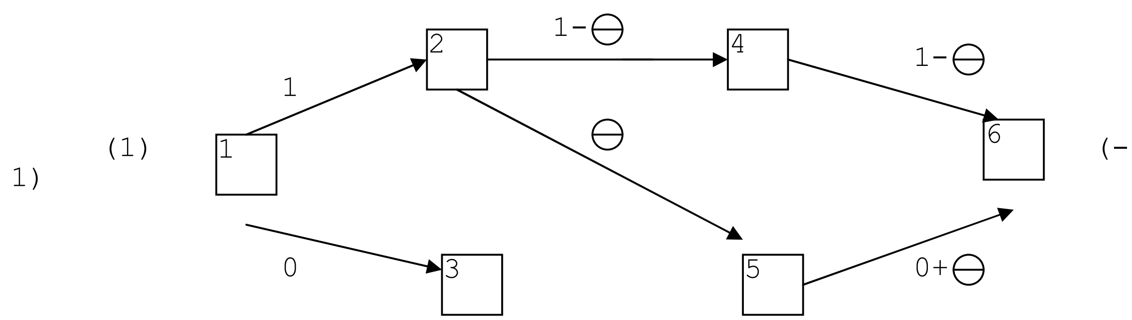
Ebből:
$Y_1=0$, $Y_2=-4$, $Y_3=-3$, $Y_4=-7$, $Y_5=-7$, $Y_6=-9$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázisváltozók együtthatóit!

$\overline{C}_{25}=-4-(-7)-2=1$ (nem tesz eleget az optimalitási feltételnek)

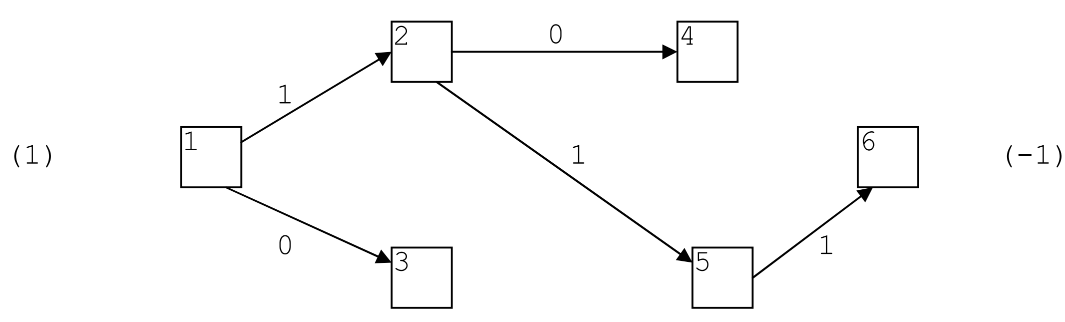
$\overline{C}_{35}=-3-(-7)-3=1$ (nem tesz eleget az optimalitási feltételnek)

Bármelyiket választhatjuk, léptessük be pl. X_{25}-öt a bázisba.



$\ominus$ =1

Vagy X_{24} vagyy X_{46} kilép a bázisból. Válassuk, mondjuk, X_{46}-t.



Számítsuk ki az Y-okat.
$Y_1=0$, $Y_1-Y_2=4$, $Y_1-Y_3=3$, $Y_2-Y_4=3$, $Y_2-Y_5=2$, $Y_5-Y_6=2$

Ebből
$Y_1=0$, $Y_2=-4$, $Y_3=-3$, $Y_4=-7$, $Y_5=-6$, $Y_6=-8$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázis változók együtthatóit!

$\overline{C_{35}} = -3 - (-6) -3 = 0$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C_{46}} = -7 - (-8) -2 = -1$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

Tehát ennek a MKHFP-nak egy optimális megoldása az alábbi:

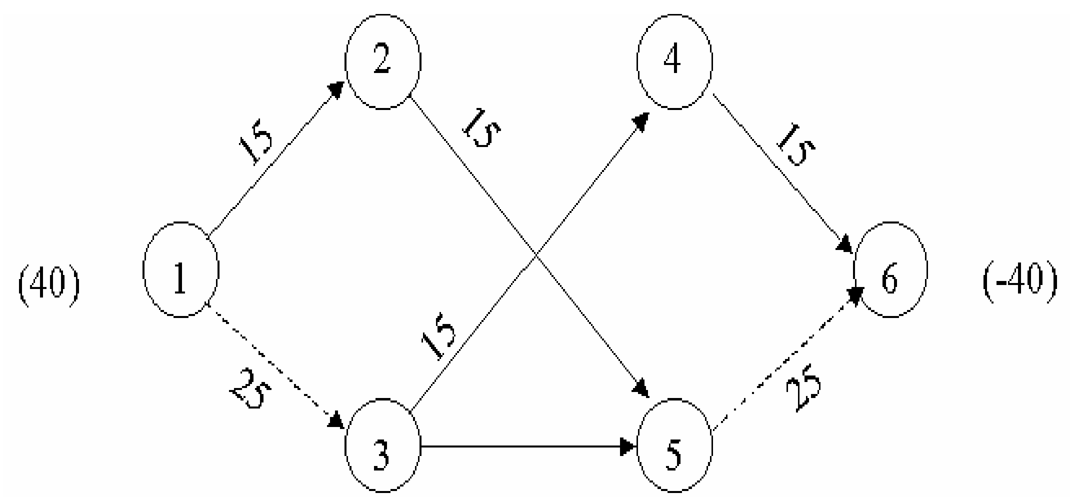
(Bázis változók) $X_{12} = 1$, $X_{25} = 1$, $X_{56} = 1$
(Bázis változók alsó korláton) $X_{13} = 0$, $X_{24} = 0$
(Nem-bázis változók alsó korláton) $X_{35} = 0$, $X_{46} = 0$

Az optimális célfüggvényérték

$Z = 1(4) + 1(2) + 1(2) = \$8$

(Megjegyezzük, hogy több optimális megoldás is van.)

2.) Több helyes megoldás is létezik, mindegyikben a nem felső korláton álló bázishoz tartozó élek feszítő fát alkotnak. Az alábbi ábra olyan lbm-et mutat, ami történetesen optimális.



3.) Számítsuk ki az Y-okat.
$Y_1 = 0$, $Y_1 - Y_2 = 15$, $Y_2 - Y_4 = 5$, $Y_2 - Y_5 = 10$, $Y_3 - Y_4 = 4$

Ebből

$Y_1 = 0$, $Y_2 = -15$, $Y_3 = -16$, $Y_4 = -20$, $Y_5 = -25$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázis változók együtthatóit!

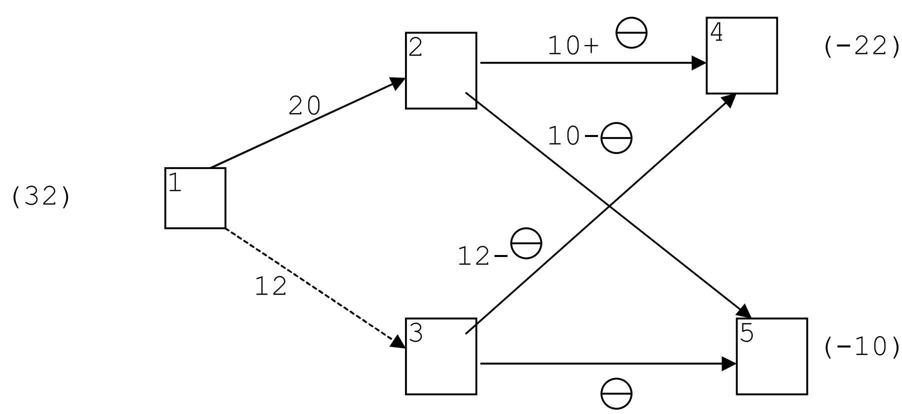
$\overline{C}_{13}$ = 0-(-16)-11 = 5 (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{23}$ = -15-(-16)-5 = -4 (kielégíti az optimalitás feltételét)

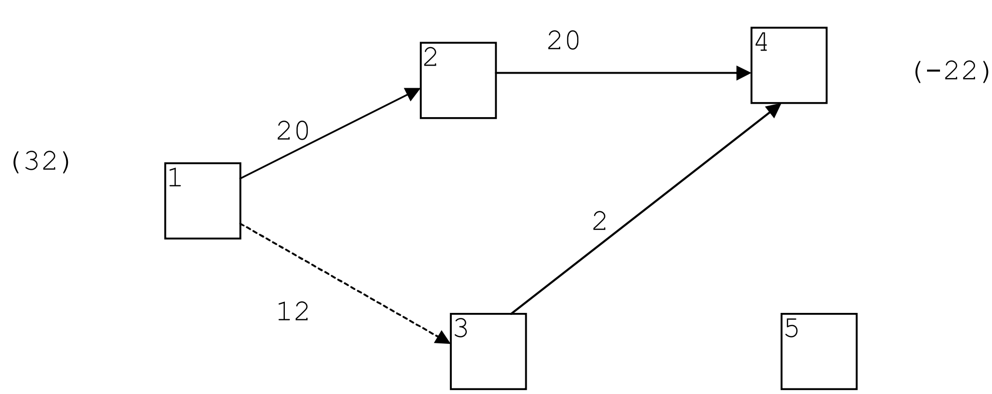
$\overline{C}_{35}$ = -16-(-25)-5 = 4 (nem elégíti ki az optimalitás feltételét)

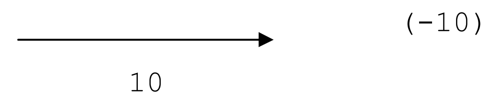
$\overline{C}_{45}$ = -20-(-25)-14 = -9 (kielégíti az optimalitás feltételét)

X_{35} –öt bevisszük a bázisba.



⊖ = 10, X_{25} elhagyja a bázist





Számítsuk ki az Y-okat.

$Y_1 = 0$, $Y_1 - Y_2 = 15$, $Y_2 - Y_4 = 5$, $Y_3 - Y_4 = 4$, $Y_3 - Y_5 = 5$

Ebből

$Y_1 = 0$, $Y_2 = -15$, $Y_3 = -16$, $Y_4 = -20$, $Y_5 = -21$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázis változók együtthatóit!

$\overline{C}_{13} = 0-(-16)-11 = 5$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{23} = -15-(-16)-5 = -4$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

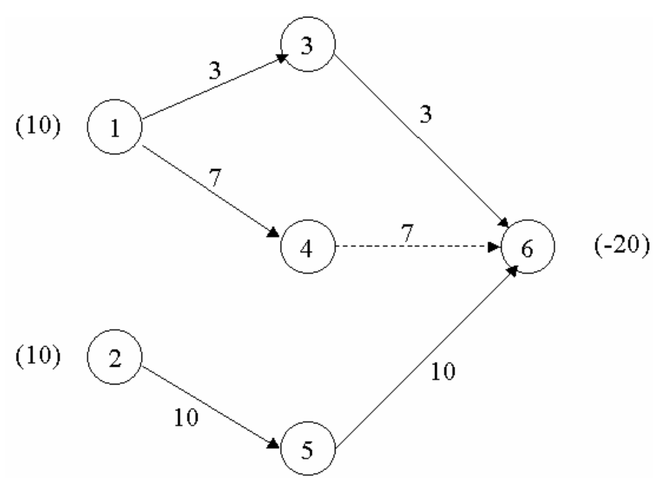
$\overline{C}_{25} = -15-(-21)-10 = -4$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{45} = -20-(-21)-14 = -13$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

Tehát a MKHFP feladat egy optimális megoldása a következő:
(Bázis változók) $X_{12} = 20$, $X_{24} = 20$, $X_{34} = 2$, $X_{35} = 10$
(Nem-bázis változók felső korláton) $X_{13} = 12$
(Nem-bázis változók alsó korláton) $X_{23} = 0$, $X_{25} = 0$, $X_{45} = 0$

A célfüggvény optimális értéke
$Z = 20(15) + 12(11) + 20(5) + 2(4) + 10(5) = \$590$

4.) Több helyes megoldás is létezik, mindegyikben a nem felső korláton álló bázishoz tartozó élek feszítő fát alkotnak. Az alábbi ábra olyan lbm-et mutat, ami történetesen optimális.



5.) Számítsuk ki az Y-okat!
$Y_1 = 0$, $Y_1-Y_2 = 15$, $Y_2-Y_4 =10$, $Y_2-Y_6 = 5$, $Y_3-Y_6 = 8$, $Y_4-Y_5 = 30$, $Y_5-Y_7 = 10$, $Y_6-Y_8 = 15$

Ebből

$Y_1 = 0$, $Y_2 = -15$, $Y_3 = -12$, $Y_4 = -25$, $Y_5 = -55$, $Y_6 = -20$,

$Y_7 = -65,\ Y_8 = -35$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázis változók együtthatóit!

$\overline{C}_{13} = 0-(-12) -10 = 2$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{23} = -15-(-12)-5 = -8$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{25} = -15-(-55) -10 = 30$ (nem elégíti ki az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{35} = -12-(-55)-25 = 18$ (nem elégíti ki az optimalitás feltételét)

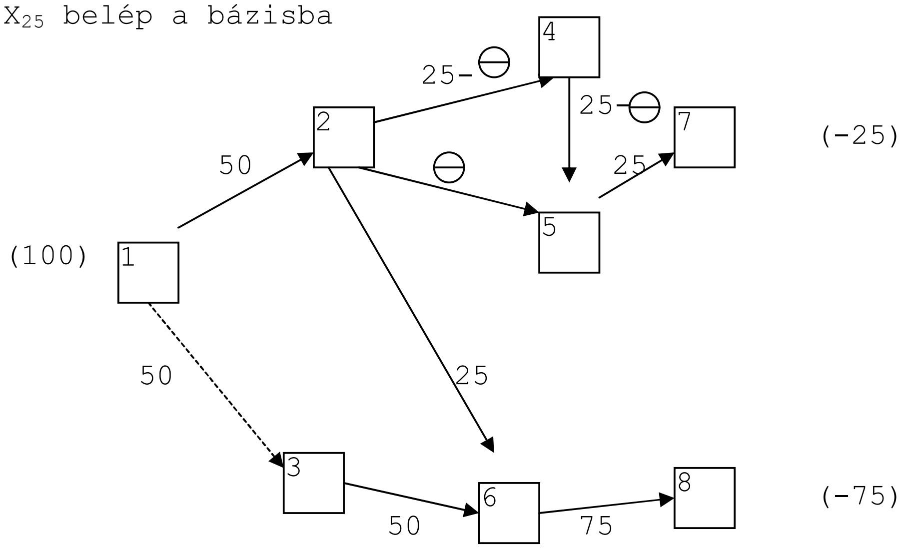
$\overline{C}_{47} = -25-(-65)-45 = -15$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{58} = -35-(-35)-10 = -10$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

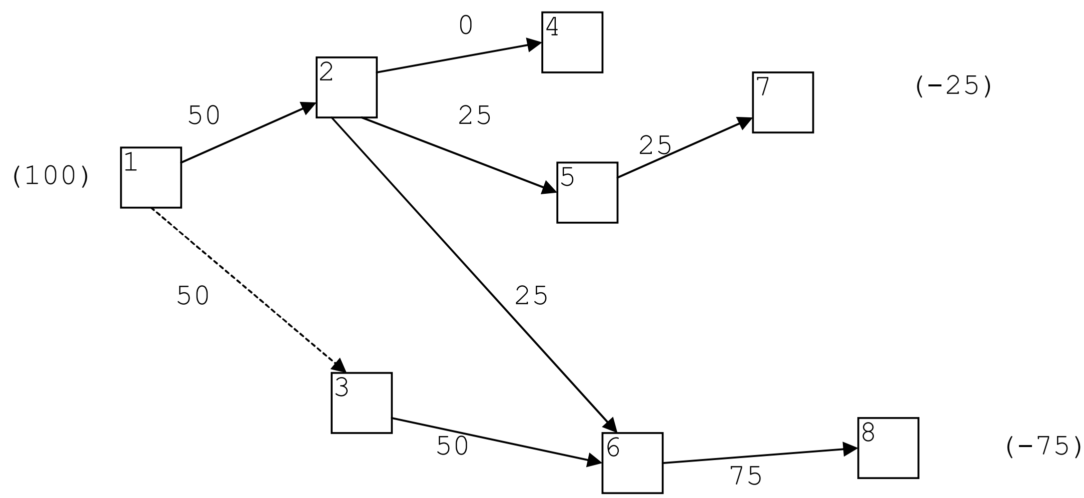
$\overline{C}_{67} = -20-(-65)-30 = 15$ (nemm elégíti ki az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{78} = -65-(-35)-45 = -75$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

X_{25} belép a bázisba



⊖ = 25, X_{45} –öt léptessük ki a bázisból



Számítsuk ki az Y-okat.
$Y_1=0$, $Y_1-Y_2=15$, $Y_2-Y_4=10$, $Y_2-Y_5=10$, $Y_2-Y_6=5$, $Y_3-Y_6=8$, $Y_5-Y_7=10$, $Y_6-Y_8=15$

Ebből
$Y_1=0$, $Y_2=15$, $Y_3=-12$, $Y_4=-25$, $Y_5=-25$, $Y_6=-20$, $Y_7=-35$, $Y_8=-35$

Határozzuk meg a célfüggvényben a nem-bázis változók együtthatóit!

$\overline{C}_{13} = 0-(-12)-10 = 2$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{23} = -15-(-12)-5 = -8$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{35} = -12-(-25)-25 = -12$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{45} = -25-(-25)-30 = -30$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{47} = -25-(-35)-45 = -35$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{58} = -25-(-35)-10 = 0$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{67} = -20-(-35)-30 = -15$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

$\overline{C}_{78} = -35-(-35)-45 = -45$ (kielégíti az optimalitás feltételét)

A MKHFP egy optimális megoldása a következő:
(Bázis változók) $X_{12} = 50$, $X_{25} = 25$, $X_{26} = 25$, $X_{36} = 50$, $X_{57} = 25$, $X_{68} = 75$
(Bázis-változók alsó korláton) $X_{24} = 0$
(Nem-bázis változók felső korláton) $X_{13} = 50$
(Nem-bázis változók alsó korláton) $X_{23} = 0$, $X_{35} = 0$, $X_{45} = 0$, $X_{47} = 0$, $X_{58} = 0$, $X_{67} = 0$, $X_{78} = 0$

A célfüggvény optimális értéke
50(15)+50(10)+0(10)+25(10)+25(5)+50(8)+25(10)+75(15) = \$3400

Áttekintő feladatok a 7. fejezethez

1a. A New York-hoz legközelebbi csúcs Cleveland (a NY-Clev út hossza 400 mérföld).
A New York-hoz második legközelebbi csúcs Nashville (a NY-Nash út hossza 800 mérföld).
A New York-hoz harmadik legközelebbi csúcs St. Louis (a NY-St. Louis út hossza 950 mérföld).
A New York-hoz negyedik legközelebbi csúcs Dallas (a NY-Clev- Dallas útvonal hossza 1300 mérföld)
A New York-hoz ötödik legközelebbi csúcs Salt Lake City (a NY- Nash-SLC útvonal hossza 2000 mérföld)
A New York-hoz hatodik legközelebbi csúcs Phoenix (a NY-St. Louis- Phoenix útvonal hossza 2050 mérföld).
A New York-hoz hetedik legközelebbi csúcs LA (a NY-St. Louis- Phoenix-LA) útvonal hossza 2450 mérföld.)

1b.

CLEV	STL	NASH	PHO	DALL	SLC	LA		
400	950	800	M	M	M	M	NY	1
0	M	M	1800	900	M	M	CLEV	1
M	0	M	1100	600	M	M	STL	1
M	M	0	M	600	1200	M	NASH	1
M	M	M	0	M	M	400	PHO	1
M	M	M	M	0	M	1300	DALL	1
M	M	M	M	M	600	M	SLC	1
0+1	0+1	0+1	0+1	0+1	0+1	0+1	0+1	

1c. NY nettó kibocsátása +1, LA nettó kibocsátása pedig -1. A többi csúcs nettó kibocsátása 0. Mindegyik él szállítási költsége azonos az él hosszával, és mindegyik él kapacitása korlátlan.

2a. City 1 = NY,... City 6 = LA (ld. az ábrát)

$$\max z = x_0$$

$$\begin{aligned} \text{f.h. } & x_{12} + x_{13} = x_0 \text{ (Node 1)} \\ & x_{12} = x_{24} + x_{25} \text{ (Node 2)} \\ & x_{13} = x_{34} + x_{35} \text{ (Node 3)} \\ & x_{24} + x_{34} = x_{46} \text{ (Node 4)} \\ & x_{25} + x_{35} = x_{56} \text{ (Node 5)} \\ & x_{46} + x_{56} = x_0 \text{ (Node 6)} \end{aligned}$$

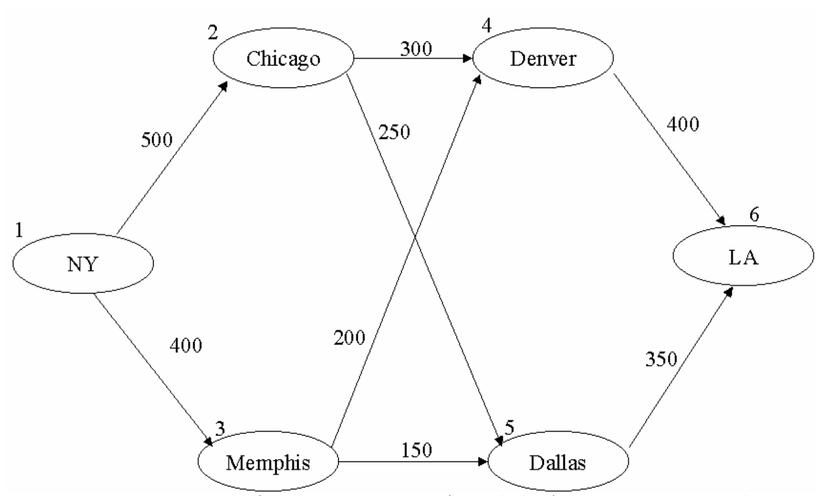
$x_{12} \le 500$, $x_{13} \le 400$, $x_{24} \le 300$, $x_{25} \le 250$, $x_{34} \le 200$, $x_{35} \le 150$,
$x_{46} \le 400$, $x_{56} \le 350$, mindegyik változó ≥ 0

2b. Induláskor címkézzük meg a nyelőt a (1,2)-(2,4)-(4,6) útvonal segítségével, és emeljük 300-zal a folyam értékét a felsorolt éleken. Ezután címkézzük meg a nyelőt az (1,3)-

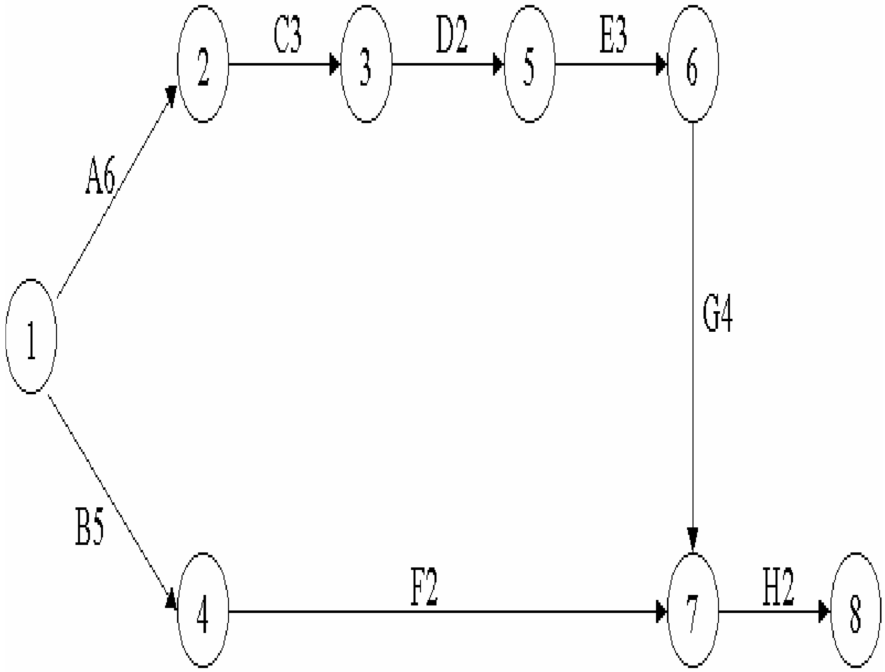
(3,5)-(5,6) útvonallal, és emelejük ezeken az éleken a folyam értékét 150-nel. Következő lépésként válasszuk az (1,2)-(2,5)-(5,6) útvonalat, és növeljük a folyam értékét 200-zal a szóbanforgó éleken. Végül emeljük a folyam értékét 100-zal az (1,3)-(3,4)- (4,6) útvonal mentén. Így a következő maximális folyamot kapjuk:

Él	A folyam értéke
NY-CHIC	500
NY-MEMP	250
CHIC-DENV	300
CHIC-DALL	200
MEMP-DENV	100
MEMP-DALL	150
DENV-LA	400
DALL-LA	350
INTO SINK	750

Ez valóban maximális, hoszen a 6-os csúcs (LA) által definiált vágás élei (4, 6) és (5, 6), és ennek a vágásnak a kapacitása 400 + 350 = 750 , tehát azonos a folyam értékével.



3a. A megoldást az alábbi ábra mutatja (, ahol mindegyik tevékenységnél az időtartam várható értékét tüntettük fel).



3b. és 3c. ET(1) = 0 LT(1) = 0 TH(1,2) = 0 MH(1,2) = 0
ET(2) = 6 LT(2) = 6 TH(2,3) = 0 MH(2,3) = 0
ET(3) = 9 LT(3) = 9 TH(3,5) = 0 MH(5,6) = 0
ET(4) = 5 LT(4) = 16 TH(5,6) = 0 MH(5,6) = 0
ET(5) = 11 LT(5) = 11 TH(6,7) = 0 MH(6,7) = 0
ET(6) = 14 LT(6) = 14 TH(7,8) = 0 MH(7,8) = 0
ET(7) = 18 LT(7) = 18 TH(1,4) = 11 MH(1,4) = 0 ET(8) = 20 LT(8) = 20 TH(4,7) = 11 MH(4,7) = 11

A kritikus út az 1-2-3-5-6-7-8 útvonal, ennek a hossza pedig 20 nap.

3d. $\min z = x_8 - x_1$

f.h. $x_2 \geq x_1 + 6$
$x_3 \geq x_2 + 3$
$x_5 \geq x_3 + 2$
$x_6 \geq x_5 + 3$
$x_7 \geq x_6 + 4$
$x_8 \geq x_7 + 2$
$x_4 \geq x_1 + 5$
$x_7 \geq x_4 + 2$
x_j urs

3e. Legyen az 1-es csúcs nettó kibocsátása +1, a 8-as csúcsé

-1, és a többi csúcs nettó kibocsátása 0. Az egységnyi szállítási költség minden élen az él hossza, és maximalizálni akarjuk az összköltséget. Mindegyik él kapacitása korlátlan. Ha egy élen a folyam értéke 1, akkor az él rajta van egy kritikus úton.

3f. A kritikus út átlagos hossza = 6 + 3 + 2 + 3 + 4 + 2 = 20

A kritkus út hosszának varianciája
=
$$\frac{64 + 4 + 4 + 16 + 16 + 16}{36}$$
= 3.33

A kritikus út hosszának szórása = $3.33^{1/2}$ = 1.82.

A $P(\mathbf{CP} \le 12) = P\left(\mathbf{Z} \le \frac{12 - 20}{1.82}\right)$ = valószínűség értéke 0!

Excellel számolva NORMDIST(12,20,1.82,1) = 0.

3g. min z = 80A + 60B + 30C + 60D + 40E + 30F + 20G

f.h.
$x_2 \ge x_1 + 6 - A$
$x_3 \ge x_2 + 3 - C$
$x_5 \ge x_3 + 2 - D$
$x_6 \ge x_5 + 3 - E$
$x_7 \ge x_6 + 4 - G$
$x_8 \ge x_7 + 2 - H$
$x_4 \ge x_1 + 5 - B$
$x_7 \ge x_4 + 2 - F$
$x_8 - x_1 \le 12$
$A,B,C,D,E,F,G \le 2$
x_j előjelkötetlen, $A...G \ge 0$

4. Szükség van egy fiktív csúcsra (amelyik a teljes kínálat és a teljes kereslet különbségét fogadja), és így tudni fogjuk, hogy melyik termelési pontból mennyia tényleges kiszállítás. Az Rt csúcs a t-edik havi munkaidőb belüli termelést képviseli, az Ot csúcs pedig a t-edik havi túlórában történő termelést.

Csúcs	Nettó kibocsátás
R1	1,000
O1	400
R2	1,200
O2	400
R3	1,200
O3	400
Fiktív	Beérkezik (3400+1200)-4300=300, így $b_{Fiktív}$= -300
Demand 1	-1000
Demand 2	-1500

Demand 3 esetén b_i = -1800. Minden él kapacitása korlátlan.

Él	Szállítási költség
R1-Dem 1	$4
R1-Dem 2	$5.50
R1-Dem 3	$7.00
O1-Dem 1	$6
O1-Dem 2	$7.50
O1-Dem 3	$9
R2-Dem 2	$4
R2-Dem 3	$5.50
O2-Dem 2	$6
O2-Dem 3	$7.50

Él	Szállítási költség
R3-Dem 3	$4
O3-Dem 3	$6

A fiktív csócsba vezető élek szállítási költsége 0.

5. Kezdjük a NY csúcsnál, és válasszuk a NY-Cleveland élt.(a hossza 400). Ezután válasszuk a NY-Nashville (800 hosszúságú) élt. Következő lépésként a (600 hosszúságú) Nashville-Dallas éllel bővítjük a fát, majd pedig a (600 hosszúságú) Dallas-St. Louiséllel. Válasszuk ezután (a 900 hosszúságú) Dallas-Phoenix élt, majd pedig (a 400 hosszúságú) Phoenix-LA élt. Végül a 600 hosszúságú Salt Lake City-Los Angeles él következik. A minimális feszítő fa teljes hossza 4300 mérföld.

6.

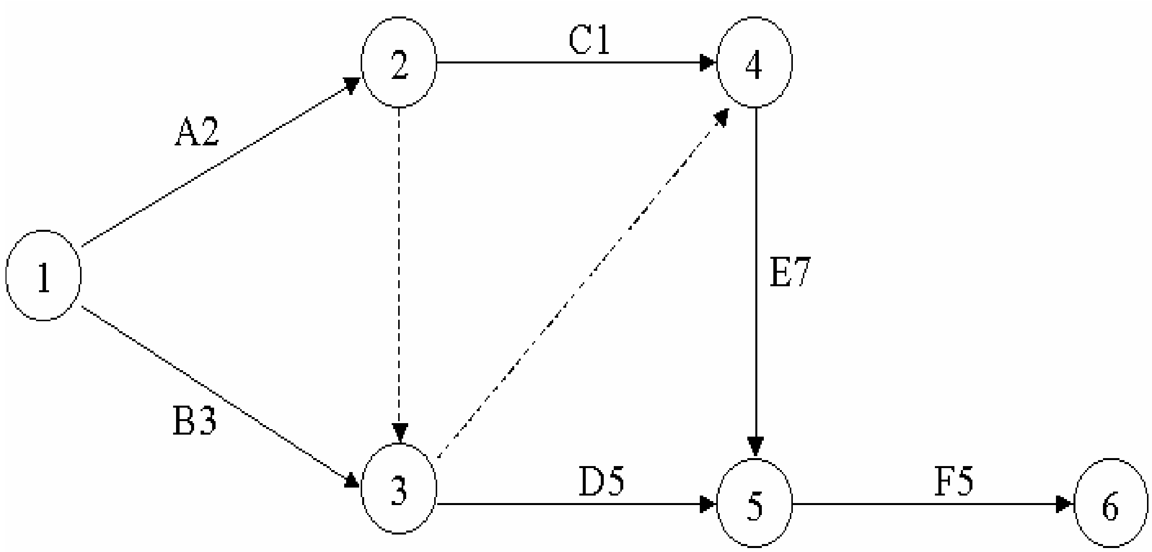
Él	Szállítási költség	Él kapacitás
P11-C1	33 + 51	-
P11-I'	33 + 51	-
P21-C1	30 + 42	-
P21-I'	30 + 42	-
P12-C2	43 + 60	-
P22-C2	41 + 71	-
I'-I	0	6
I-C2	13	-
P11-D	0	-
P21-D	0	-
P12-D	0	-
P22-D	0	-

Pij = az i-edik termék termelése a t-edik periódus alatt
I = Raktárkészlet az 1. periódus végén
C1 = Kereslet az 1. periódusban
C2 = Kereslet a 2. periódusban
D = Fiktív keresleti pont

Csúcs	Netto kibocsátás
P11	7
P12	4
P21	9
P22	9
C1	-9

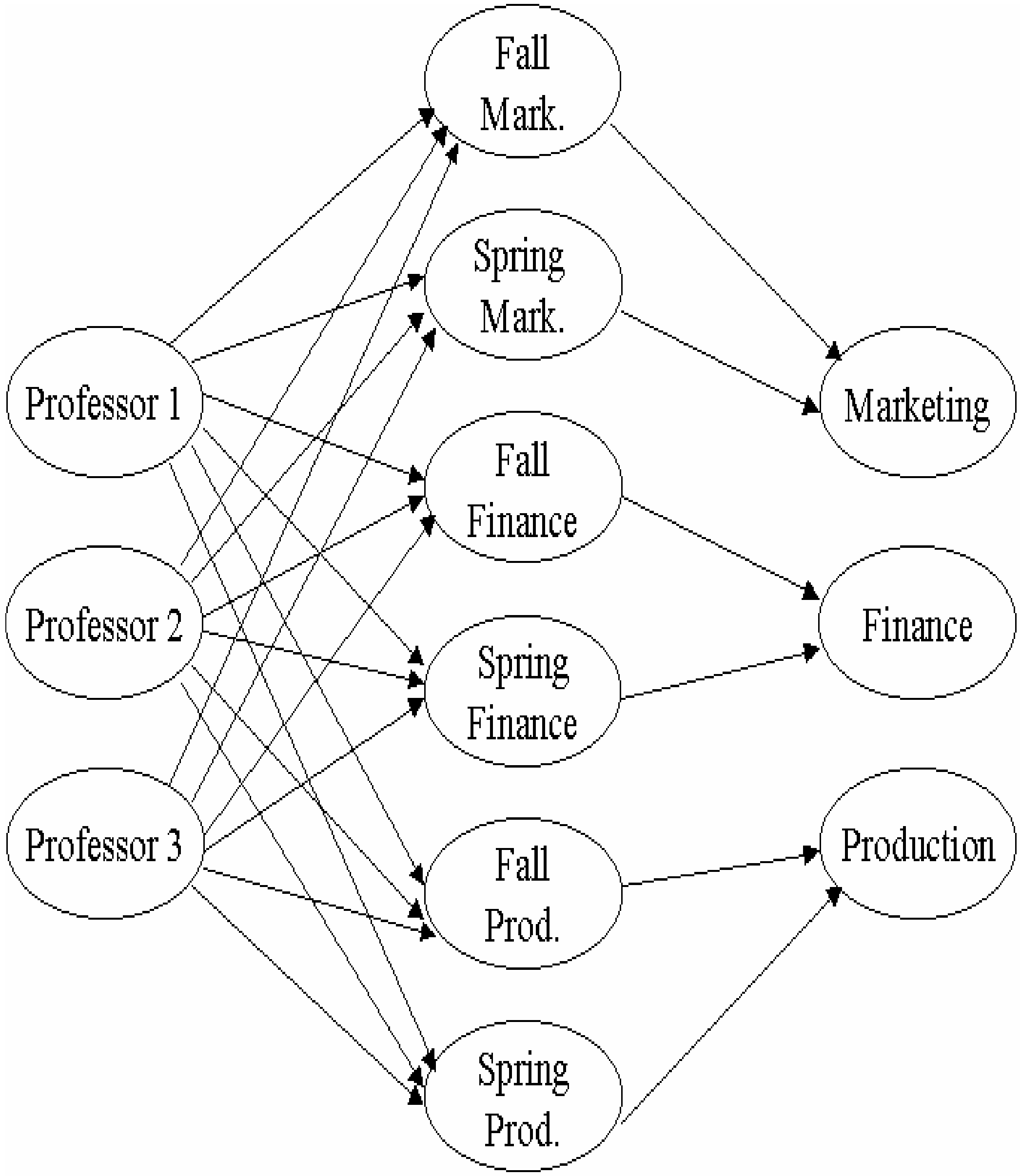
```
C2            -11
I'             0
I              0
D            -(29 - 20)
```

7a. A feladat megoldását az alábbi ábra mutatja



7b. B-E-F egy kritikus út, a hossza 15. (ld. azokat a csúcsokat, melyekhez tartozó duál-változó értéke -1).

8. Tekintsük az alábbi ábrát. Mindegyik "professzor" csúcs nettó kibocsátása 4. Mindegyik "tantárgy" csúcs nettó kibocsátása -4. A többi csúcs nettó kibocsátása 0. Például a Fall Finance csúcsból a Finance csúcsba vezető élen az alsó korlát 1 azzal a céllal, hogy mindegyik szemeszterben minimális számú tantárgyat tanítanak. Minden "professzor" csúcsból kiinduló élen a szállítási költség értéke az adott oktatási feladatért járó juttatás -1-szerese. Például az 1-es Professzortól a Fall Marketing tárgyhoz vezető élen a költség -(3+6) = -9.



9. A megoldásnak az a kulcsa, hogy az egyes gépeken szükséges percekben kifejezett műveletigényt tekintsük keresletnek. Képviselje a Dij csúcs az i-edik hónapban a j-edik termék iránti keresletet (a gépen szükséges műveletigényt percekben kifejezve). Az Mij csúcs pedig képviselje az i-edik hónapban a j-edik gépen munkára fordítható perceket.

Csúcs	Nettó kibocsátás
M11	2400
M12	2400
M21	2400
M22	2400
D11	-30(50)
D12	-20(70)
D13	-15(80)
D21	-30(60)
D22	-20(90)
D23	-15(120)
FIKTÍV	-100

Él	Költség/perc
M11-D11	40/30
M11-D12	45/20
M11-D21	(40 + 15)/30
M11-D22	(45 + 10)/20
M12-D12	60/20
M12-D13	55/15
M12-D22	(60 + 10)/20
M12-D23	(55 + 5)/15
M21-D21	40/30
M21-D22	45/20
M22-D22	60/20
M22-D23	55/15
M11-Fiktív	0
M12-Fiktív	0
M21-Fiktív	0
M22-Fiktív	0

Mindegyik él kapacitása korlátlan.